Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

La Desigualdad de Sobolev

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Ricardo Jesús RAMOS CASTILLO

ASESOR

Dra. Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Ramos, R. (2019). *La Desigualdad de Sobolev*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono IP Nº 619-7000
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las .....18:00.... horas del día Viernes 1 de marzo de 2019, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini (Presidente), Mg. Teófanes Quispe Méndez (Miembro), Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «LA DESIGUALDAD DE SOBOLEV», presentado por el señor Bachiller RICARDO JESÚS RAMOS CASTILLO, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

....Dieciocho.................................(18). Sobresaliente

A continuación el Presidente del Jurado, Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini, manifestó que el señor Bachiller RICARDO JESÚS RAMOS CASTILLO, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ....19:10.... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. VÍCTOR RAFAEL CABANILLAS ZANNINI
PRESIDENTE

MG. TEÓFANES QUISPE MÉNDEZ
MIEMBRO

DRA. YOLANDA SILVIA SANTIAGO AYALA
MIEMBRO ASESOR

Dedico este trabajo a mis
padres y hermanos

FICHA CATALOGRÁFICA

RICARDO JESÚS RAMOS CASTILLO

La desigualdad de Sobolev, (Lima), 2019.
IX, 61 p. 29,7cm (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2019)
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática.
I.UNMSM/Facultad de Ciencias Matemáticas
II. La desigualdad de Sobolev

Agradecimentos

Con la conclusión de este trabajo, dejo mis agradecimientos:
A la Dra. Yolanda Santiago Ayala de quien aprendí mucho desde antes de empezar ésta obra. Es justo decir que gran parte del trabajo se lo debo a ella, su supervisión y la motivación siempre ofrecida.
A los profesores Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini y Mg. Teófanes Quispe Mendez por aceptar ser el jurado de éste trabajo, también a los siguientes profesores que me ayudaron a lo largo de mis años de universidad: Eugenio Risco Coveñas, Pedro Contreras Chamorro y Alberto Rivero Zapata.
A mis padres y hermanos, que siempre estuvieron conmigo incondicionalmente a lo largo de cada proyecto que me he propuesto y haberme soportado por tantos años.
A Percy Guerra Ríos, con quien tuve provechosas conversaciones sobre el tema y presto siempre ante cualquiera de mis dudas.
A cada compañero que haya tenido la paciencia de escucharme hablar acerca de matemática. Entre ellos Amilcar Vélez, Franco Vargas, Jesús Zapata, Miguel Yépez y Piere Rodriguez.
Y a Aracelli Carrasco, por su apoyo emocional y sobre todo el apoyo al momento de presentar éste trabajo.

RESUMEN

LA DESIGUALDAD DE SOBOLEV

RICARDO JESÚS RAMOS CASTILLO

DICIEMBRE - 2018

Asesor: Yolanda Santiago Ayala

Título obtenido: Licenciado en Matemática

El trabajo se enfoca en probar la desigualdad de Sobolev. Inicialmente, nos enfocamos en las desigualdades clásicas, tales como la desigualdad de Jensen, Hölder y Minkowski. Luego de ello, presentamos las herramientas principales con las que avanzaremos durante el proyecto que son convolución y transformada de Fourier.
Para la segunda mitad empezamos mostrando al operador maximal de Hardy-Littlewood y probando la desigualdad de Sobolev. Finalmente, exhibimos una aplicación de la teoría expuesta para resolver un problema en concreto: Las ecuaciones de Schrödinger.

PALABRAS CLAVES: Transformada de Fourier, Operador maximal de Hardy-Littlewood, Ecuación de Schrödinger.

ABSTRACT

THE SOBOLEV INEQUALITY

RICARDO JESÚS RAMOS CASTILLO

DICIEMBRE - 2018

Advisor: Yolanda Santiago Ayala

Obtained title: Graduate in Mathematics

This work is focused on proving the Sobolev inequality. Firstly, we center our attention in classic theory such as Jensen, Hölder and Minkowski inequalities. After that, we present our main tools with which we will work during our project that are convolution and Fourier transform. For the second-half, we start recalling the maximal Hardy-Littlewood operator in order to prove Sobolev inequality. Finally, we show an application of the presented theory to solve a particular problem: The Schrödinger equations.

Keywords: Fourier transform, maximal Hardy-Littlewood operator, the Schrödinger equation.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La motivación inicial de éste trabajo viene del mundo de la mecánica cuántica. Dicha teoría hace un especial énfasis en áreas de la matemática como análisis, ecuaciones diferenciales parciales, topología y geometría. Los tópicos aquí presentados apenas recorren los primeros temas posibles a tratar enfocados en el área de análisis y ecuaciones diferenciales.
En el segundo capítulo repasamos la teoría elemental acerca de funciones integrables. Para ello probamos una familia de desigualdades elementales, que a pesar de su sencilla exposición son bastante versátiles en su utilidad y eficiencia. Cuando mencionamos que son eficientes nos referimos a que obtenemos las mejores desigualdades posibles. Mayormente éste capítulo se apoya en [7].
Para el tercer capítulo, pasamos de la teoría de la medida a la teoría del análisis funcional. En ella describimos en profundidad al espacio de Hilbert L^2 y mostramos una isometría llamada **Transformada de Fourier**. Conseguimos expandir la definición de dicho operador a espacios L^p con $1 \leq p < \infty$ y de hecho mostramos que el espacio de llegada es $L^{p'}$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Para una mejor lectura recomiendo leer [4], [14] y [20].
Con lo visto hasta ahora, en el cuarto capítulo estudiamos al **operador maximal de Hardy-Littlewood** y junto al **lema de Vitalli** conseguimos mostrar la desigualdad de Sobolev y posteriormente la **desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev**. Finalmente, extendemos éstos resultados para los espacios de distribuciones. Un estudio más profundo es visto en [3], [9], [12] y [8]; para la sección dedicada a la teoría de cubrimientos puede consultar [6] y [13].
Para el último capítulo estudiamos la **ecuación no lineal de Schrödinger**

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u + g(u) &= 0 \\ u(0) &= \phi \end{aligned}$$

donde $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una función diferenciable. Dicha ecuación surge al estudiar la disperción de la luz en medios no homogéneos. Éste capítulo es impulsado principalmente por [11] y [15]. Obtenemos explícitamente un candidato para la solución, sin embargo en una primera vista dicha solución no es una función, pues luce más bien como un operador. Nos dedicamos en éste capítulo a mostrar que dicha solución es realmente una función. Probamos además que dicha solución es única.

Capítulo 2

Preliminares

El objetivo de este capítulo es entender a aquellas funciones que modelan la posición de un partícula. Sabemos que no podemos determinar de manera exacta dónde se encuentra una partícula en un momento dado, sin embargo dada una región $A \subset \mathbb{R}^3$ podemos saber con qué "probabilidad"se encuentra en dicha región "sumando las probabilidades puntuales".
Es decir, tenemos asociada a una partícula p una función P tal que

$$Probabilidad\ que\ p\ se\ encuentre\ en\ A = \int_A P(x)dx$$

donde vemos que se debe tener

$$\int_{\mathbb{R}^3} P(x)dx = 1$$

puesto que sabemos que la dicha párticula esta en ese espacio, pero no dónde.

2.1. Los Espacios L^p

Primero fijemos el contexto en el que trabajamos, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces llamaremos medida exterior de A

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : I_k = \prod_{i=1}^{n} [a_{ik}, b_{ik}],\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

donde $|I_k| = \prod_{i=1}^{n} (b_{ik} - a_{ik})$.
Diremos que A es medible si

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c)$$

para todo $X \subset \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\mathcal{M}$ al conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ medibles y $|A| := m^*(A)$ para $A \in \mathcal{M}$.

Observación 1. Una buena referencia para las siguientes propiedades es [7, Capítulo 1].

1. El conjunto $\mathcal{M}$ es un σ-algebra, es decir
   a) El espacio total $\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ están en $\mathcal{M}$.
   b) Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $R^n \backslash A \in \mathcal{M}$.
   c) Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$.
2. Tenemos que:
   a) $m^*(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
   b) $m^*(\varnothing) = 0$.
   c) Si $A \subset B$ entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.
   d) $m^*(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^n m^*(A_i)$.
3. Diremos que A es de medida nula si $m^*(A) = 0$.
4. Todo conjunto abierto (y cerrado) es medible. De hecho, todo elemento de la σ-algebra de Borel, aquella generada por los conjuntos abiertos y cerrados, es medible.
5. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, podemos restringirnos a $\mathcal{M}(\Omega) = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{M}\}$ y las observaciones $1, 2, 3$ siguen valiendo para $\mathcal{M}(\Omega)$. La observación 4 vale si Ω es abierto.

Ahora que ya definimos a los conjuntos medibles, pasemos a ver a las funciones medibles. Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible sobre Ω, o simplemente medible, si $f^{-1}(A)$ es medible para todo subconjunto abierto A de $\mathbb{R}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$, diremos que f es medible si para $f = f_1 + if_2$ con $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, son medibles.

Ejemplo 1. 1. Las funciones continuas.

2. Las funciones paso (Step-functions) Dado un conjunto A medible, definamos $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n \backslash A \end{cases}$$

que será llamado la función característica de A. Con ellas definimos a las funciones paso como las combinaciones lineales (finitas) de estas funciones, es decir, dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ medibles y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ podemos construir

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

en general las funciones con las que trabajemos pueden ser aproximadas por funciones de este tipo.

Dada una función f medible sobre Ω no negativa, es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Definamos por

$$\int_{\Omega} f(x)dx = sup\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j|A_j| : A_j \in \mathcal{M},\ a_j \geq 0, 1 \leq j \leq n; f \geq \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}\right\}$$

Observe que en general no podemos garantizar la existencia de este supremo.

Definición 2.1. Diremos que $f \geq 0$ es integrable sobre Ω si $\int_{\Omega} f(x)dx$ es finito. En general, llamemos $f^+ = max\{f, 0\}$ y $f^- = max\{-f, 0\}$ diremos que f es integrable sobre Ω si f^+ y f^- son integrables sobre Ω. En dicho caso escribiremos

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\Omega} f^+(x)dx - \int_{\Omega} f^-(x)dx.$$

Con esta definición, observe que vale

$$\begin{array}{rcl} \int_{\Omega}(f_1 + f_2)(x)dx & = & \int_{\Omega} f_1(x)dx + \int_{\Omega} f_2(x)dx \\ \int_{\Omega}(\lambda f)(x)dx & = & \lambda \int_{\Omega} f(x)dx \end{array}$$

donde f_1, f_2, f son integrables y λ es un número real.

Definición 2.2. Dado $0 < p < \infty$, el espacio de funciones medibles tales que $|f|^p$ es integrable lo denotaremos por $L^p(\Omega)$, es decir,

$$L^p(\Omega) = \{f : f \text{ es medible e } \int_{\Omega} |f|^p < \infty\}$$

En este espacio consideraremos la siguiente aplicación

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

queda claro esta aplicación es no negativa y también

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_p &= \left(\int_\Omega |\lambda f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\int_\Omega |\lambda|^p|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= |\lambda|\left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= |\lambda|\|f\|_p\end{aligned}$$

también si $f, g \in L^p$ entonces tenemos que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

este último resultado es conocido como la desigualdad de Minkowski que será probado luego.
Este espacio posee entonces una seminorma, pues si $\|f\|_p = 0$, no necesariamente f es nula, pero al menos si podemos garantizar que f es nula casi todo punto (c.t.p.), es decir, existe un conjunto de medida cero A tal que $f = 0$ en $\Omega\backslash A$. Sea $B = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \Omega : f(x) > \frac{1}{n}\}$, entonces

$$\left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{\{x\in\Omega: f(x)>\frac{1}{n}\}} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{n}\left|\{x \in \Omega : f(x) > \frac{1}{n}\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

luego cada $\{x \in \Omega : f(x) > \frac{1}{n}\}$ es de medida cero y por tanto el espacio total $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ es también de medida cero. Es por ello que como no podemos garantizar que $\|f\|_p$ implique que el espacio sea de medida nula, consideraremos la relación de equivalencia $f \sim g$ si y sólo si $f - g = 0$ c.t.p., la cual es una relación de equivalencia y como siguiente candidato a espacio de estudio tendremos a

$$L^p([\Omega]) := \{[f] : f \in L^p(\Omega)\}$$

gracias a la siguiente proposición este espacio será denotado por el mismo símbolo que $L^p(\Omega)$ pues no habrá confusión para fines prácticos. Por ejemplo las propiedades puntuales (positividad, igualdad de funciones, continuidad, etc) serán citadas y entendidas como propiedades casi todo punto:

Proposición 2.1. *El espacio $L^p(\Omega)$ dotado con la norma $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Primero veamos que $\|[f]\|_p$ esta bien definida. En efecto, si $[f] = [g]$, entonces $f - g = 0$ c.t.p., luego $f = g$ c.t.p., por lo tanto tenemos que existe un conjunto A de medida cero tal que $f(x) = g(x),\ \forall x \in \Omega\backslash A$, luego:

$$\int_\Omega |f|^p = \int_{\Omega\backslash A} |f|^p = \int_{\Omega\backslash A} |g|^p = \int_\Omega |g|^p$$

que es lo único que necesitamos. De ahora en adelante no nos tomaremos la molestia de distinguir $[f]$ con f, ni tampoco $\|[f]\|_p$ con $\|f\|_p$, pues no habrá problemas de confusión.

□

Por otro lado, definiremos

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &:= ess\ sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} \\ &:= inf\{C > 0 : |f(x)| < C, \text{para todo } x \in \Omega\backslash A,\ \text{donde } |A| = 0\} \end{aligned}$$

que similar al caso $\|f\|_p$, $\|f\|_\infty$ verifica las propiedades arriba señaladas.

Las demás propiedades de norma valen por las observaciones hechas arriba. Sólo falta ver que el espacio sea completo.

Si $1 \leq p < \infty$, tomemos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Dado $\epsilon = 1$, existe $n_1 > 0$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < 1,\ \forall n, m \geq n_1.$$

Luego, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $n_2 > n_1$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2},\ \forall n, m \geq n_2$$

Repetimos el proceso, es decir, dado $i \geq 2$, $\epsilon = \frac{1}{2^{i+1}}$, existe $n_{i+1} > n_i$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^{i+1}},\ \forall n, m \geq n_{i+1}.$$

Si tomamos $g_m = f_{n_1} + \sum_{i=1}^m |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$, notamos que

$$\|g_m\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^m \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1$$

para ver la convergencia de la secuencia $\{g_m\}_m$ es converegente, necesitamos

Teorema 2.1 (Teorema de la convergencia dominada)**.** *Dada $\{g_m\}$ una sucesión de funciones medibles sobre (Ω, μ), tales que $g_n(x) \to g(x)$, $n \to \infty$, c.t.p. y existe una función medible f que domina a la sucesión, es decir, $|g_m| \leq f$, c.t.p., entonces g es integrable y vale*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_m\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu.$$

Su prueba es dada en [7, Teorema 2.24].
Así por el teorema de convergencia dominada, existe $g = \lim_{m\to\infty} g_m$, donde $g \in L^p(\Omega)$, por ello

$$F_m = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{m} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_{m+1}}$$

converge en el espacio $L^p(\Omega)$ a una función f. Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $J > \frac{1}{\epsilon}$ tal que $\|f - f_{n_j}\|_p < \frac{\epsilon}{2}$ para $j \geq J$. Así, si $n \geq n_J$

$$\|f_n - f_{n_J}\|_p \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalmente

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - f_n\|_p < \epsilon$$

para $n \geq n_J$, por lo tanto $f_n \to f$.
Si $p = \infty$, consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^\infty(\Omega)$, como $|\|f_n\|_\infty - \|f_m\|_\infty| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ y sea $L = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty$. Considere

$$A_{n,k} = \{x \in \Omega : |f_n(x)| \geq L + \frac{1}{k}\}$$

note que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \geq 1$ tal que $A_{n,k}$ es de medida nula para cada $n \geq N_k$, considere también

$$B_{n,m,k} = \{x \in \Omega : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$

similar al caso anterior y dado que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $M_k \geq 1$ tal que $B_{n,m,k}$ es de medida nula para cada $n, m \geq N_k$. Ahora, si tomamos

$$C = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}; n\geq N_k} A_{n,k} \right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}; n,m\geq N_k} B_{n,m,k} \right)$$

es un espacio de medida nula.
Dado $\epsilon > 0$, existe $k > 0$, tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Para cada $x \in \Omega \backslash C$, tenemos que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para $n, m \geq M_k$, luego $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y tiene un límite $f(x)$ y tomemos f, para el cual

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ \forall x \in \Omega \backslash C.$$

Como C es de medida nula, si imponemos $f(x) = 0, x \in C$, obtenemos que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ \forall x \in \Omega$, c.t.p., veamos que $f \in L^\infty$ y $f_n \to f$ en L^∞.

Dado $x \in \Omega \backslash C$ y $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$, de donde

$$|f_n(x)| < L + \epsilon, \forall n \geq N_k$$

así tomando $n \to \infty$, tenemos que $|f(x)| \leq L, \forall x \in \Omega \backslash C$ y por tanto $f \in L^\infty$. Similarmente,

$$|f_m(x) - f_l(x)| < \epsilon, \forall m, l \geq M_k$$

al tomar $l \to \infty$, tenemos que $|f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall x \in \Omega \backslash C$ y por tanto $f_m \to f$ en L^∞.

$\square$

En particular estudiaremos el espacio de las funciones $L^p(\mathbb{R}^n)$, a las cuales simplemente la denotaremos por L^p.

Proposición 2.2. *Los siguientes espacios son densos en L^p, $1 \leq p \leq \infty$*

1. *Funciones simples, el conjunto $\{\sum_{finita} \alpha_A \chi_A / A$ es medible y $\alpha_A \in \mathbb{R}\}$.*
2. *Funciones paso, el conjunto $\{\sum_{finita} \alpha_A \chi_A / A$ es un cubo y $\alpha_A \in \mathbb{R}\}$.*
3. *Si $p < \infty$, el espacio de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto, C_0^∞.*

Demostración. Para el primer ítem comencemos con el caso $1 \leq p < \infty$, dados $s \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{N}$ considere los conjuntos

$$A_{s,t} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{s}{2^t} \leq f(x) < \frac{s+1}{2^t} \right\},$$

claramente cada conjunto es medible, si $s \neq s'$ entonces $A_{s,t} \cap A_{s',t} = \varnothing$ y $\mathbb{R}^n = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} A_{s,t}$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Ahora dado $t \in \mathbb{N}$ fijo considere

$$g_t = \sum_{s=-4^t}^{4^t} \frac{s}{2^t} \chi_{A_{s,t}}$$

probaremos que algún t nos dá la función g_t deseada.

Para ello tomemos $h_t = |g_t - f|^p$, y notemos que $\lim_{t \to \infty} h_t(x) = 0$, pues dado $\epsilon > 0$ existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon^{\frac{1}{p}} > \frac{1}{2^t}$ y tal que $2^t > |f(x)|$, luego $h_t(x) = |g_t(x) - f(x)|^p = \left| \frac{s}{2^t} - f(x) \right|^p < \epsilon$ que es lo que queríamos. También $|h_t| \leq 2^p |f|^p$, para ver esto, si $x \in A_{s,t}$ tenemos dos casos, si $|s| > 4^t$ entonces $|h_t(x)| = |f|^p \leq 2^p |f|^p$, si $|s| \leq 4^t$ notemos que $|g_t(x)| \leq |f(x)|$, luego $|h_t(x)| \leq 2^p |f|^p$. El problema acaba usando el teorema de la convergencia dominada para h_t

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \int |h_t| &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} \int |g_t - f|^p &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} \|g_t - f\|_p^p &= 0 \end{aligned}$$

para el caso general, sea $f = f^+ - f^-$, donde $f^\pm = max\{0, \pm f\}$ luego aproximamos cada uno de ellos por g, h y $G = g - h$ verifica lo que queremos.
Si $p = \infty$ de manera análoga, tomemos a los conjuntos

$$A_{s,t} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{s}{2^t} \leq f(x) < \frac{s+1}{2^t} \right\},$$

que son medibles. Dada una función $f \in L^\infty$, existe un número $M_t \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq 2^t M_t$$

y tomamos

$$g_t = \sum_{s=-2^t M_t}^{2^t M_t} \frac{s}{2^t} \chi_{A_{s,t}}$$

que son funciones paso tales que

$$|f(x) - g_t(x)| \leq \frac{1}{2^t}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y así $\|f - g_t\|_\infty \leq \frac{1}{2^t}$ y por tanto $g_t \to f$ en L^∞, que es lo que queríamos.
Para el segundo ítem, primero aproximemos a la función f por una función paso de la forma

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

Dada la definición que dimos para conjuntos medibles, cada medible A_i puede ser "aproximado por abiertos", esto quiere decir que dado $\epsilon_i > 0$ podemos conseguir abiertos $U_{i,1}, \ldots, U_{i,k_i}$ tales que

1. $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{k_i} U_{i,j}$

2. $|\sum_{j=1}^{k_i} |U_{i,j}| - |A_i|| < \epsilon_i$

luego dado $\epsilon > 0$, tomemos $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{|a_i|+1}$ y por tanto

$$\|a_i \chi_{A_i} - \sum_{j=1} k_i a_i \chi_{U_{i,j}}\|_p < \frac{\epsilon}{n}$$

si $p \neq \infty$ y cuando $p = \infty$, tomamos $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{|a_i|+1}$

$$\|a_i \chi_{A_i} - \sum_{j=1} k_i a_i \chi_{U_{i,j}}\|_p < \frac{\epsilon}{n}$$

en ambos casos, se ve que basta tomar $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} k_i a_i \chi_{U_{i,j}}$ para tener lo pedido. La demostración del último ítem lo pospondré por ahora y será dada luego. □

Observación 2. Podemos cambiar la condición de la convergencia dominada que en lugar de tomar una familia numerable de funciones, la familia sea parametrizada por $\{f_t\}_{t \in (a,b)}$, tal que $lim_{t \to a} f_t(x) = f(x)$ para casi todo $x \in \Omega$ y $|f_t| \leq |g|$, donde g es una función L^1, entonces $lim_{t \to a} \int_\Omega f_t = \int_\Omega f$. Podemos, pues si el resultado fuese falso, existiría una subsucesión $\{f_{t_n}\}$ tal que $t_n \to a$ que no verifica que $lim_{t \to a} \int_\Omega f_{t_n} = \int_\Omega f$, lo que no puede ser por el teorema usual de la convergencia dominada. El mismo resultado vale para $t \to b$. Inclusive los valores de a y b pueden ser $\pm\infty$, respectivamente.

2.2. Desigualdades Básicas

Los siguientes resultados son de conocimiento general, mas quiero mencionarlos para poder dar contexto y fijar ideas sobre el tema que estamos trabajando. Estas desigualdades tendrán sentido inclusive si en alguno de los miembros aparece un valor $\pm\infty$, entendiéndose que si $+\infty \leq a$ entonces se tiene que $a = +\infty$, de igual manera si $b \leq -\infty$ entonces $b = -\infty$.

Teorema 2.2 (Desigualdad de Jensen). *Sea $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función convexa y f una función medible sobre Ω tal que $f \in L^1(\Omega)$ y $|\Omega| < +\infty$, entonces*

$$J\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega J(f)$$

Recuerde que una función convexa es aquella para la cual

$$J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y)$$

para todo $t \in [0, 1]$ y $x, y, tx + (1-t)y \in D(J)$.

Demostración. De la condición de convexidad resulta que

$$J(y) \leq \left(\frac{z-y}{z-x}\right) J(x) + \left(\frac{y-x}{z-x}\right) J(z)$$

para todo $x < y < z$, luego se tiene que

$$\frac{J(y) - J(x)}{y - x} \leq \frac{J(z) - J(y)}{z - y}$$

así, fijando $y = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f$, se nota que existen $\sup_{x<y} \frac{J(y)-J(x)}{y-x} \leq \text{ínf}_{z>y} \frac{J(z)-J(y)}{z-y}$, y tomemos un valor a entre ellos, por lo tanto

$$\frac{J(y) - J(x)}{y - x} \leq a \leq \frac{J(z) - J(y)}{z - y}.$$

Obtenemos que $J(y) - J(x) \leq a(y - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (si $x < y$ se usa la primera desigualdad y si $x > y$ la segunda). Dando $x = f(u)$ e integrando sobre Ω

$$\int_\Omega J(y) - J(f(u))du \leq a \int_\Omega (y - f(u))du$$

y note que $\int_\Omega ydu = |\Omega|y$, pues y es independiente de u. Como $|\Omega|y = \int_\Omega f$, en el lado derecho la integral es cero, mientras que en el lado izquierdo queda $|\Omega|J(y) - \int_\Omega J(f(u))du$.
Finalmente, obtenemos la desigualdad deseada

$$J\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega J(f).$$

□

Teorema 2.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Dados $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$, más aún vale*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

Demostración. Sea $A = \Omega \backslash g^{-1}(0)$, luego $\int_\Omega |fg| = \int_A |fg|$. Así que de ahora en adelante consideraré que g es no nula.
Ahora, tomemos el espacio (Ω, μ), donde la medida es dada por $\mu(X) = \int_X |g(y)|^q dy$. Con esta medida el espacio Ω tiene medida finita, $\mu(\Omega) = \|g\|_q^q$. Aplicando la desigualdad de Jensen para $J(x) = x^p$, la cual es una función convexa si $p \geq 1$, y $h(u) = \frac{|f(u)|}{|g(u)|^{q-1}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{\mu(\Omega)}\textstyle\int_\Omega h(u)d\mu(u)\right)^p &\leq \tfrac{1}{\mu(\Omega)}\textstyle\int_\Omega h(u)^p d\mu(u)\\
\left(\tfrac{1}{\|g\|_q^q}\textstyle\int_\Omega \tfrac{|f(u)|}{|g(u)|^{q-1}}|g(u)|^q du\right)^p &\leq \tfrac{1}{\|g\|_q^q}\textstyle\int_\Omega \left(\tfrac{|f(u)|}{|g(u)|^{q-1}}\right)^p |g(u)|^q du
\end{aligned}$$

como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene que $p(q-1) = q$, luego simplificando queda

$$\left(\int_\Omega |f(u)||g(u)|du\right)^p \leq \|g\|_q^{q(p-1)} \int_\Omega |f(u)|^p du$$

como $q(p-1) = p$, sacando raíz obtenemos la desigualdad deseada, es decir

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

□

Corolario 2.3.1 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Dadas $f, g \in L^p(\Omega)$, entonces $f+g \in L^p(\Omega)$ y vale la siguiente desigualdad*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. Notamos que $|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)| \leq |f(x)+g(x)|^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|)$, luego

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx \leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|dx + \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|dx$$

Dado que $|f+g|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$, desde que

$$\int_\Omega \left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^{p'} dx = \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx < \infty,$$

podemos aplicar la desigualdad de Hölder para los sumandos del término derecho de nuestra desigualdad y obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f|dx & \leq & \left(\int_\Omega |f+g|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g|dx & \leq & \left(\int_\Omega |f+g|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

finalmente, tenemos que

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

donde para cancelar $\|f+g\|^{p-1}$, necesitamos que sea no nula. Si fuese nula no hay problema, pues en dicho el caso la desigualdad es claramente verificada.

□

Corolario 2.3.2 (Desigualdad Integral de Minkowski)**.** *Dada $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$*

medible, entonces

$$\left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |F(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Demostración. Basta probar la desigualdad sobre $|F|$, es decir cuando F sea positiva, es más consideraremos sólo aquellos puntos donde F es no nulo. Sea $G(x) := \int_{\Omega_2} F(x,y)dy$, luego tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^{p-1}\, |G(x)| dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^{p-1} \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\right) dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |G(x)|^{p-1}\, F(x,y)dy\right) dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Por el teorema de Fubini[1] tenemos

$$\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |G(x)|^{p-1}\, F(x,y)dy\right) dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^{p-1}\, F(x,y)dx\right) dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

Luego por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |G(x)|^{p-1}\, F(x,y)dx &\leq \left(\int_{\Omega_1} \left(|G(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} |F(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} |F(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} |F(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}} \left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |F(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

luego, cancelando $\left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}}$, tenemos

$$\left(\int_{\Omega_1} |G(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p^2}} \leq \left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |F(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

y elevando a la p obtenemos lo deseado.

□

[1] Vea [7, Teorema 2.37]

2.3. Convolución

La siguiente herramienta que presento es útil en la teoría de aproximación de funciones y llega a ser tan útil que aproxima a las funciones apenas L^p por funciones C^∞. En términos generales, promedia los valores de una función mediante el cual los puntos cercanos tienen un mayor peso que aquellos que se encuentran lejanos.

Definición 2.3. Dadas $f \in L^1$, $g \in L^q$, definamos

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Sigue de la desigualdad de Minkowski

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_q
\end{aligned}$$

que $f * g \in L^q$ y por tanto $f * g$ esta bien definida casi todo punto.

En realidad, si $f \in L^p$, $g \in L^q$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, donde $1 \leq p, q, r < \infty$, entonces $f * g$ esta definida c.t.p. y $f * g \in L^r$. Para ello basta ver la desigualdad de Young:

Teorema 2.4 (Desigualdad de Young)**.** *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 < p, q, r < \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(g * h(x))dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$$

Demostración. Consideremos las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
\alpha(x,y) &= |f(x)|^{\frac{p}{r'}} |g(x-y)|^{\frac{q}{r'}} \\
\beta(x,y) &= |g(x-y)|^{\frac{q}{p'}} |h(y)|^{\frac{r}{p'}} \\
\gamma(x,y) &= |h(y)|^{\frac{r}{q'}} |f(x)|^{\frac{r}{q'}}
\end{aligned}$$

dado que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(g * h(x))dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha(x,y)\beta(x,y)\gamma(x,y)dxdy$$

aplicando la desigualdad de Hölder

$$\begin{array}{rcl}\int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha\beta\gamma(x,y)dxdy & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\alpha\beta(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\gamma(x,y)|^{q'} dxdy\right)^{\frac{1}{q'}} \\ & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\alpha\beta(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x)|^p |h(y)|^r dxdy\right)^{\frac{1}{q'}} \\ & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\alpha\beta(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \|h\|_p^{\frac{r}{q'}}\end{array}$$

análogamente, como $1 = \frac{q}{r'} + \frac{q}{p'}$

$$\begin{array}{rcl}\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\alpha\beta(x,y)|^q dxdy & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\alpha(x,y)|^{r'} dxdy\right)^{\frac{q}{r'}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\beta(x,y)|^{p'} dxdy\right)^{\frac{q}{p'}} \\ & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x)|^p |g(x-y)|^q dxdy\right)^{\frac{q}{r'}} \times \\ & & \qquad \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |g(x-y)|^q |h(y)|^r dxdy\right)^{\frac{q}{p'}} \\ & \leq & \|f\|_p^{\frac{pq}{r'}} \|g\|_p^{\frac{q^2}{r'}} \|g\|_p^{\frac{q^2}{p'}} \|h\|_p^{\frac{qr}{p'}} \\ & \leq & \|f\|_p^{\frac{pq}{r'}} \|g\|_p^q \|h\|_p^{\frac{qr}{p'}}\end{array}$$

finalmente

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha\beta\gamma(x,y)dxdy \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$$

y tenemos el resultado pedido.

□

Observación 3. Como establecimos inicialmente, la convolución tiene propiedades que nos ayudarán para aproximar funciones:

1. Si $f \in C_0^\infty$, entonces $f \in L^1$, así dado $g \in L^p$, entonces $f * g \in C^\infty$, más aún, vale $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$, donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ y

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Basta mostrar que vale $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$.
Veamos por inducción sobre $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$:
Caso inicial: Si $|\alpha| = 0$, es decir el operador D^α no hace nada sobre f ni sobre $f * g$ y evidentemente vale $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$.
Paso inductivo: Dado α supongamos que la hipótesis inductiva sea cierta para cualquier β tal que $|\beta| < |\alpha|$, luego $D^\alpha = \frac{d}{dx_i} D^\beta$, es claro que $|\beta|+1 = |\alpha|$ y por hipótesis inductiva vale $D^\beta(f * g) = (D^\beta f) * g$. Tomemos entonces $\bar{f} = D^\beta f$, luego $\bar{f} \in C_0^\infty$ y

$$\begin{array}{rcl}\frac{(\bar{f}*g(x+he_i) - \bar{f}*g(x))}{h} & = & \frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x+he_i-y)g(y)dy\right. \\ & & \qquad \left. - \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x-y)g(y)dy\right) \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n} g_h(y)dy\end{array}$$

donde $g_h(y) = \frac{1}{h}(\bar{f}(x+he_i-y) - \bar{f}(x-y))g(y)$, si $|h| \leq 1$, veremos que existe un valor $M > 0$ tal que $|g_h| \leq M|g|$. Supongamos que eso no pase, luego existen $\{(h_n, y_n)\}$ tales que $|h_n| \leq 1$, $y_n \in \mathbb{R}^n$ y

$$|g_{h_n}(y_n)| > n|g(y_n)|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.
Si $\{y_n\}$ no es una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión y_{n_k} tal que $|y_{n_k}| > k$, pero en dicho caso $g_{h_{n_k}}(y_{n_k}) = 0$ para cierto k suficientemente grande, pues f tiene soporte compacto y si la norma de y_{n_k} es suficientemente grande entonces también lo es la norma de $x + h_{n_k}e_i - y_{n_k}$ y $x - y_{n_k}$, valores que en algún momento escaparán del soporte. Como esto no puede ocurrir por hipótesis, entonces $\{y_n\}$ es una sucesión acotada.
Luego tome una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}$ y suponga que existe $\epsilon > 0$ tal que $h_{n_k} > \epsilon$. Dado que $\bar{f}$ es continua y los valores no nulos se encuentran sobre un conjunto compacto, entonces $\bar{f}$ esta acotada y también sus primeras derivadas. Así,

$$\left|\frac{1}{h_{n_k}}(\bar{f}(x+h_{n_k}e_i-y_{n_k}) - \bar{f}(x-y_{n_k}))g(y_{n_k})\right| \leq \frac{2L}{\epsilon}|g(y_{n_k})|$$

donde $L = \sup\{|\bar{f}(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$. Pero esto no puede ocurrir por hipótesis, luego existe una subsucesión $\{h_{n_{k_r}}\}$ que converge a cero y para no cargar la notación denotaremos a dicha sucesión sólo por h_r, así mismo $y_{n_{k_r}}$ será denotado por y_r.
Finalmente $\{y_r\}$ converge a algún valor, digamos y_0 y h_r a cero, luego es claro que $g_{h_r}(y_r)$ converge a $\frac{d}{dx_i}\bar{f}(x-y_0)g(y_0)$, pero esto no puede ocurrir por la hipótesis. Por tanto existe un valor $M > 0$ tal que $|g_h| \leq M|g|$.
Gracias a ello, por el teorema de convergencia dominada y dado que $\lim_{h\to 0} g(y) = \frac{d}{dx_i}\bar{f}(x-y)g(y)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}(\bar{f}*g(x+he_i) - \bar{f}*g(x)) &= \lim_{h\to 0}\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} g_h(y)dy \\
&= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dx_i}\bar{f}(x-y)g(y)dy \\
&= \tfrac{d}{dx_i}\bar{f} * g
\end{aligned}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned} D^\alpha(f*g) &= \tfrac{d}{dx_i}\left(D^\beta(f*g)\right) \\ &= \tfrac{d}{dx_i}\left((D^\beta f)*g\right) \\ &= \left(\tfrac{d}{dx_i}D^\beta f\right)*g \\ &= (D^\alpha f)*g \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es la hipótesis inductiva y la tercera la acabamos de probar.

2. Sean f, g funciones tales que $f*g$ tiene sentido, entonces $supp(f*g) \subset supp(f)+supp(g)$, donde $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$. Para ver esto, sea $x \notin supp(f)+supp(g)$, entonces

$$f*g(x) = \int f(x-y)g(y)dy,$$

ya que $x \notin supp(f)+supp(g)$, entonces $f*g(x)=0$. Finalmente, $supp(f*g) \subset supp(f)+supp(g)$.

3. Juntando los dos ítems anteriores, tenemos que si $f \in C_0^\infty$ y $g \in L^p$ con $supp(g)$ compacto, entonces $f*g \in C_0^\infty$. Y que en general si f, g tienen soporte compacto y $f*g$ tiene sentido, entonces su convolución también tendrá soporte compacto.

Ahora suponga que $\phi \in L^1$, tal que $\phi \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = 1$. Defina $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ y note que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\epsilon(x)dx = 1$, así tenemos la proposición:

Proposición 2.3. *Sea $f \in L^p$, entonces*

1. $f*\phi_\epsilon \to f$ *en* L^p, *cuando* $\epsilon \to 0$.

2. *Si f es acotada y uniformemente continua, entonces $f*\phi_\epsilon$ converge a f uniformemente en $\mathbb{R}^n$, cuando $\epsilon \to 0$.*

3. *Si $f \in L^\infty$ y es continua en un abierto U, entonces $f*\phi_\epsilon$ converge a f uniformemente en compactos de U.*

Demostración. 1. Primero, tenemos que

$$\begin{aligned} \|f*\phi_\epsilon - f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f*\phi_\epsilon(x)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\phi_\epsilon(y)dy - f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

y como $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x)dx = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_\epsilon - f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n}(f(x-y) - f(x))\phi_\epsilon(y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n}(f(x-\epsilon y) - f(x))\phi_1(y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f(x-\epsilon y) - f(x))\phi_1(y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy
\end{aligned}$$

La primera igualdad haciendo el cambio de variable $y \to \epsilon y$ y la segunda es la desigualdad de Minkowski. Luego,

$$\|f * \phi_\epsilon - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p \phi_1(y)dy$$

donde $\tau_{\epsilon y} f(x) = f(x - \epsilon y)$. Tome $g_\epsilon(y) = \|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p \phi_1(y)$, entonces $g_\epsilon(y) \to 0$ si $\epsilon \to 0$ y

$$|g_\epsilon(y)| \leq (\|\tau_{\epsilon y} f\|_p + \|f\|_p)\phi_1(y) = 2\|f\|_p \phi(y),$$

podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y finalmente

$$\|f * \phi_\epsilon - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} g_\epsilon(y)dy \to 0$$

que es lo que queríamos probar.

2. Dada la secuencia $\{g_n = \phi_1 \chi_{B_n(0)}\}$, para la cual $g_n(x) \to \phi_1(x)$ y $|g_n(x)| \leq \phi_1(x)$, luego del teorema de convergencia dominada para $\epsilon > 0$ y $M = \sup\{|f(x)|\}$ existe $r > 0$ tal que $\int_{B_r(0)} \phi_1(y)dy > 1 - \frac{\epsilon}{4M}$.
   Ahora, con el cambio de variable $y \to \delta y$,

$$\begin{aligned}
f * \phi_\delta(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_y f(x) - f(x))\phi_\delta(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{\delta y} f(x) - f(x))\phi_1(y)dy
\end{aligned}$$

sea $\delta' > 0$ tal que si $|x' - x| < \delta'$ entonces $|f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, luego al considerar $\delta \leq \frac{\delta'}{r}$

$$\begin{aligned}
|f * \phi_\delta(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{\delta y} f(x) - f(x))\phi_1(y)dy\right| \\
&\leq \left|\int_{B_r} (\tau_{\delta y} f(x) - f(x))\phi_1(y)dy\right| \\
&\qquad + \left|\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} (\tau_{\delta y} f(x) - f(x))\phi_1(y)dy\right| \\
&\leq \int_{B_r} |(\tau_{\delta y} f(x) - f(x))| \phi_1(y)dy \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} |(\tau_{\delta y} f(x) - f(x))| \phi_1(y)dy \\
&\leq \int_{B_r} \tfrac{\epsilon}{2} \phi_1(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} 2M\phi_1(y)dy
\end{aligned}$$

Finalmente $|f * \phi_\delta(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ y la convergencia es uniforme en todo $\mathbb{R}^n$.

3. Dado un compacto K de U, entonces f definida en dicho conjunto es uniformemente continua y acotada. Análogo al caso anterior

$$\begin{aligned} f * \phi_\delta(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_y f(x) - f(x))\phi_\delta(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{\delta y} f(x) - f(x))\phi_1(y)dy \end{aligned}$$

existe $\delta' > 0$ tal que si $|x' - x| < \delta'$ entonces $|f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ y al considerar $\delta \leq \frac{\delta'}{r}$, donde $r > 0$ es escogido como en el caso anterior

$$\begin{aligned} |f * \phi_\delta(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{\delta y} f(x) - f(x))\phi_1(y)dy\right| \\ &\leq \left|\int_{B_r} (\tau_{\delta y} f(x) - f(x))\phi_1(y)dy\right| \\ &\qquad + \left|\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} (\tau_{\delta y} f(x) - f(x))\phi_1(y)dy\right| \\ &\leq \int_{B_r} |(\tau_{\delta y} f(x) - f(x))|\, \phi_1(y)dy \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} |(\tau_{\delta y} f(x) - f(x))|\, \phi_1(y)dy \\ &\leq \int_{B_r} \frac{\epsilon}{2}\phi_1(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} 2M\phi_1(y)dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

por tanto la convergencia es uniforme en K.

□

Capítulo 3

La Transformada de Fourier

En el primer capítulo presenté el contexto general en el que deberían (a criterio personal) ser estudiadas las funciones que representan la posición de una partícula. Sin embago el espacio L^1 no es muy bueno en propiedades, por ejemplo, es sabido que cualquier funcional continuo $T : L^1 \to \mathbb{R}$ puede ser visto como una función f en L^∞, en el sentido que $T(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$, sin embargo no todo funcional continuo de L^∞ puede ser visto como una función f en L^1. En dicho caso se dice que L^1 no es reflexivo.
Ahora que ya nos desencatamos de L^1, busquemos un candidato mejor. Nuestra siguiente opción debe ser alguno de los espacios L^p donde $1 < p < \infty$, ya que dichos espacios sí son reflexivos[1], pero sólo uno es un espacio de Hilbert, es decir, posee un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que induce una métrica completa sobre dicho espacio y dicha opción es L^2.
El producto interno en $L^2(\Omega)$ viene dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$$

donde $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ y $\overline{g(x)}$ es el conjugado de un número complejo, tal que representen la posición de una partícula, es decir $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 1$.
El objetivo es presentar a la transformada de Fourier como una herramienta que nos ayudará a hacer cálculos sobre funciones en L^2. Gracias a ella podemos transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones del tipo polinomial y algunas propiedades como diferenciabilidad son vistas como propiedades de integrabilidad. El principio que sigue es parecido al de convolución (donde nos apoyamos en las funciones reguladoras), siguiendo ese espíritu buscaremos funciones que faciliten los cálculos (funciones de Gauss).

[1] Vea [1, Capítulo 4] para una explicación detallada

3.1. Definición y Propiedades Generales

Sea $f \in L^1$, la transformada de Fourier de f, será denotada por $\widehat{f}$ y esta dado por

$$\widehat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} f(x)dx$$

Note que $\widehat{f}(z)$ esta bien definida, pues

$$|\widehat{f}(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} f(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_1$$

luego dicha integral es finita y siempre existe.

Teorema 3.1. *Dados $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

1. $(\lambda f + g)\widehat{}= \lambda \widehat{f} + \widehat{g}$.
2. $(g * f)\widehat{}= \widehat{g}\ \widehat{f}$.
3. *Si $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, entonces $(D^\alpha f)\widehat{}(z) = (2\pi i z)^\alpha \widehat{f}$, $\forall |\alpha| \leq k$.*
4. *Si $x^\alpha f \in L^1$, para todo $|\alpha| \leq k$ entonces $D^\alpha \widehat{f}(z) = ((-2\pi i x)^\alpha f)\widehat{}(z)$, para todo α con $|\alpha| \leq k$.*

Donde $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$, con $z = (z_1, \ldots, z_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Demostración. 1. El primer ítem es sencillo, pues basta ver que

$$\begin{array}{rcl} (\lambda f + g)\widehat{} & = & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z}(\lambda f(x) + g(x))dx \\ & = & \lambda \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} f(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} g(x)dx \\ & = & \lambda \widehat{f}(z) + \widehat{g}(z). \end{array}$$

2. Para el segundo ítem, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (f * g)\widehat{}(z) & = & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} f * g(x)dx \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} f(y)g(x-y)dydx \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y.z} f(y) e^{-2\pi i (x-y).z} g(x-y)dydx \\ & = & \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-y).z} g(x-y)dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y.z} f(y)dy\right) \\ & = & \widehat{f}(z)\widehat{g}(z) \end{array}$$

que es lo que queríamos.

3. Cada $D^\alpha f$ es continua y tiene soporte compacto, luego está en L^1. También por inducción, basta probarlo para la variable x_1. Tenemos que

$$\left(\frac{df}{dx_1}\right)^{\widehat{}}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} \frac{df}{dx_1}(x)dx$$

integrando por partes tenemos

$$\begin{array}{rcl}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} \frac{df}{dx_1}(x)dx & = & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x.z} \frac{df}{dx_1}(x_1,y)dx_1 dy \\
& = & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x.z} \frac{df}{dx_1}(x_1,y)dx_1 dy \\
& = & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-a}^{a} \frac{d}{x_i}\left(e^{-2\pi i x.z}\right) f(x_1,y)dx_1 dy \\
& = & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-a}^{a} -2\pi z_i e^{-2\pi i x.z} f(x_1,y)dx_1 dy \\
& = & -2\pi z_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x.z} f(x_1,y)dx_1 dy \\
& = & -2\pi z_i \widehat{f}(z)
\end{array}$$

donde *supp*$(f) \subset (-a,a) \times R^{n-1}$ y la tercera igualdad se tiene por integración por partes.

4. Finalmente, repetiremos el mismo argumento inductivo que usamos en una proposición anterior, es decir, basta que $\frac{d\widehat{f}}{dx_i}(z) = ((-2\pi i x_i)f)^{\widehat{}}(z)$. Para ello, tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\widehat{f}(z+he_i)-\widehat{f}(z)}{h} & = & \frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.(z+he_i)} f(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} f(x)dx\right) \\
& = & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-2\pi i x.(z+he_i)} - e^{-2\pi i x.z}}{h} f(x)dx
\end{array}$$

así si tomamos

$$g_h(x) = \frac{e^{-2\pi i x.(z+he_i)} - e^{-2\pi i x.z}}{h} f(x)$$

tenemos que cuando $h \to 0$ entonces $g_h(x) \to (-2\pi i x_i)e^{-2\pi i x.z} f(x)$. Finalmente si queremos utilizar el teorema de la convergencia dominada debemos acotar a g_h. Sabemos que la función $t(h) = e^{-2\pi i x.(z+he_i)}$ es diferenciable en todo punto, en particular lo es en cero, luego

$$t'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-2\pi i x.(z+he_i)} - e^{-2\pi i x.z}}{h} = (-2\pi i x_i)e^{-2\pi i x.z}$$

por lo tanto la expresión

$$\frac{e^{-2\pi i x.(z+he_i)} - e^{-2\pi i x.z}}{h}$$

esta acotada en una vecindad de cero, luego existe un valor $M > 0$ tal que $|g_h(x)| \leq M|f(x)|$. Finalmente por el teorema de la convergencia dominada tenemos lo pedido.

□

Ejemplo 2. Calculemos algunas transformadas de Fourier

1. Las funciones de Gauss
$$G_\alpha(x) = e^{-\alpha\pi|x|^2}$$
ellas están en el espacio L^1. Tenemos
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} e^{-\alpha\pi|x|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z - \alpha\pi|x|^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha^{-1}\pi|z|^2} e^{\alpha^{-1}\pi|z|^2 - 2\pi i x.z - \alpha\pi|x|^2} dx \\ &= e^{-\alpha^{-1}\pi|z|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\alpha^{\frac{1}{2}} x - i\alpha^{-\frac{1}{2}} z|^2} dx\end{aligned}$$
donde en la última igualdad entendemos que
$$|x - iz|^2 = (x_1 - iz_1)^2 + \cdots + (x_n - iz_n)^2.$$
Luego haciendo cambio de variable nos queda
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} e^{-\alpha\pi|x|^2} dx = e^{-\alpha^{-1}\pi|z|^2} \int_{\mathbb{R}^n - i\alpha^{-\frac{1}{2}} z} \alpha^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|y|^2} dy$$
del teorema de residuo en análisis complejo[2] sabemos que
$$\int_{\mathbb{R}^n - i\alpha^{-\frac{1}{2}} z} e^{-\pi|y|^2} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y|^2} dy = 1$$
pues la función decrece de orden $|z|^2$. Así,
$$\widehat{G_\alpha}(z) = \alpha^{-\frac{n}{2}} e^{-\alpha^{-1}\pi|z|^2}$$
y esto vale para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. La función característica
$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & , x \in C \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n \backslash C \end{cases},$$

[2]Revise [18, Teorema 10.29]

donde $C = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$. En este caso tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z}\chi_C(x)dx & = & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x_1 z_1+\cdots+x_n z_n}\chi_{[a_1,b_1]}\dots\chi_{[a_n,b_n]}dx_1\dots dx_n \\ & = & \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x_j z_j}\chi_{[a_j,b_j]}dx_j \\ & = & \prod_{j=1}^{n}\int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i x_j z_j}dx_j \\ & = & \prod_{j=1}^{n} -\frac{1}{2\pi i z_j}\left(e^{-2\pi i b_j z_j} - e^{-2\pi i a_j z_j}\right) \end{array}$$

Teorema 3.2. *Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f}$ es continua y se va a cero en el infinito, es decir* $\lim_{|z|\to\infty}\widehat{f}(z) = 0$

Demostración. Tenemos que

$$\widehat{f}(z+h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.(z+h)}f(x)dx$$

donde $g_h(x) = e^{-2\pi i x.(z+h)}f(x)$, note que g_h es integrable, para todo h, $\lim_{h\to 0} g_h(x) = e^{-2\pi i x.z}f(x)$ y $|g_h(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego por el teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g_h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{h\to 0} g_h(x)dx$$

Así $\widehat{f}(z+h) \to \widehat{f}(z)$, cuando $h \to 0$.
Para la segunda parte, sea $X = \{f \in L^1 : \lim_{|z|\to\infty}\widehat{f}(z) = 0\}$, note que $X \subset L^1$, es un subespacio vectorial, pues si $f, g \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{|z|\to\infty}(\lambda f + g)\widehat{\ }(z) = \lim_{|z|\to\infty}\lambda\widehat{f}(z) + \widehat{g}(z) = \lambda\lim_{|z|\to\infty}\widehat{f}(z) + \lim_{|z|\to\infty}\widehat{g}(z) = 0.$$

Ahora si $f, g \in L^1$, entonces

$$|\widehat{f}(z) - \widehat{g}(z)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z}(f(x) - g(x))dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n}|f(x) - g(x)|dx$$

luego X es un subespacio cerrado de L^1, por lo tanto basta encontrar un subconjunto cuyo espacio generado sea denso sobre L^1, por ejemplo el espacio de las funciones paso. Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z}\chi_C(x)dx & = & \prod_{j=1}^{n} -\frac{1}{2\pi i z_j}\left(e^{-2\pi i a_j z_j} - e^{-2\pi i - a_j z_j}\right) \\ & = & \prod_{i=1}^{n}\frac{2sen(2\pi i a_i z_i)}{2\pi i z_i} \end{array}$$

donde el último término va para cero cuando $|z| \to \infty$ y tenemos lo pedido.
□

3.2. Extensión sobre L^2

Hemos visto que

$$\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$$

es una aplicación continua, desde que $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, sin embargo no sabemos si esta aplicación es sobreyectiva (que en efecto no lo es por el teorema anterior) ni tampoco sabemos si es inyectiva. Además el espacio donde viven las funciones que expresan la posición de una partícula es L^2, así que trabajar en L^1 no es conveniente.
Para conocer $\mathcal{F}(L^1)$ empecemos dando algunos resultados parciales.

Lema 3.1. *Si $f, g \in L^1$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx$$

Demostración. Tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iy.x} f(y)dy\right] g(x)dx$$

expresión que gracias al teorema de Fubini y que $f, g \in L^1$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iy.x} f(y)dy\right] g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iy.x} f(y)g(x)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iy.x} g(x)dx\right] f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)dy.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.1. *Si $f \in L^1$ y $\widehat{f} \in L^1$, entonces para casi todo x se tiene que $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi iz.x}\widehat{f}(z)dz$.*

Demostración. Tomemos en el lema anterior $g(z) = e^{2\pi ix.z - \epsilon^2\pi|z|^2}$, donde sabemos que esta aplicación está en L^1, pues $|g(z)| = e^{-\epsilon^2\pi|z|^2} \in L^1$, luego

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iy.z} g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iy.z} e^{2\pi ix.y - \epsilon^2\pi|y|^2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y-x).z} e^{-\epsilon^2\pi|y|^2} dy \\
&= \epsilon^{-n} e^{-\pi\frac{|x-z|^2}{\epsilon^2}}
\end{aligned}$$

La última relación se obtiene al querer hallar la transformada de Fourier de $e^{-\epsilon^2\pi|y|^2}$

en el punto $z-x$. Luego tenemos que

$$h_\epsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(z)g(z)dz=\int_{\mathbb{R}^n}f(z)\widehat{g}(z)dz=\int_{\mathbb{R}^n}f(z)\epsilon^{-n}e^{-\pi\frac{|x-z|^2}{\epsilon^2}}dz$$

cuando tomamos la función $\phi(z)=e^{-\pi|z|^2}$, notamos que $h_\epsilon(x)=f*\phi_\epsilon(x)$, luego $h_\epsilon=f*\phi_\epsilon\to f$ en L^1 y por tanto $h_\epsilon(x)\to f(x)$ en c.t.p.; por otro lado

$$h_\epsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(z)g(z)dz=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(z)e^{2\pi ix.z-\epsilon^2\pi|z|^2}dz$$

dado que $\widehat{f}(z)e^{2\pi ix.z-\epsilon^2\pi|z|^2}\to\widehat{f}(z)e^{2\pi ix.z}$, cuando $\epsilon\to 0$, y que $|\widehat{f}(z)e^{2\pi ix.z-\epsilon^2\pi|z|^2}|\leq|\widehat{f}(z)|$, por el teorema de convergencia dominada, tenemos que

$$h_\epsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(z)e^{2\pi ix.z-\epsilon^2\pi|z|^2}dz\to\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(z)e^{2\pi ix.z}dz$$

cuando $\epsilon\to 0$. Por lo tanto $f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(z)e^{2\pi ix.z}dz$ en c.t.p., que es lo que queríamos.
□
Gracias a la proposición anterior sabemos que la transformada de Fourier es inyectiva, pues si tomamos $f,g\in L^1$ tales que $\widehat{f}=\widehat{g}$, tenemos entonces que $(f-g)\widehat{}=0\in L^1$, entonces

$$f(x)-g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(\widehat{f}(z)-\widehat{g}(z))e^{2\pi ix.z}dz=0$$

para casi todo x, por tanto $f=g$ en L^1.

Teorema 3.3. *(Teorema de Plancherel) Si $f\in L^1\cap L^2$, entonces $\widehat{f}\in L^2$, más aún:*

$$\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2$$

Demostración. Parecido al caso anterior, consideremos $g_\epsilon(z)=e^{-\epsilon^2\pi|z|^2}\in L^1$, luego $f*g_\epsilon\in L^1$ y también como $\|\widehat{f}\|_\infty\leq\|f\|_1$, entonces $\widehat{f}$ es acotada y como $\widehat{g}_\epsilon=\epsilon^{-n}e^{-\pi\frac{|z|^2}{\epsilon^2}}\in L^1$, luego $(f*g_\epsilon)\widehat{}=\widehat{f}\,\widehat{g}_\epsilon\in L^1$, por el teorema anterior

$$f*g_\epsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix.z}(f*g_\epsilon)\widehat{}(z)dz.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f*g_\epsilon(x)|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^n}f*g_\epsilon(x)\overline{f*g_\epsilon(x)}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix.z}(f*g_\epsilon)\widehat{}(z)\overline{f*g_\epsilon(x)}dzdx\end{aligned}$$

como $(f * g_\epsilon)\hat{}$ y $\overline{f * g_\epsilon}$ están en L^1, entonces por Fubini tenemos que

$$\begin{array}{rcl}\int_{\mathbb{R}^n} |f * g_\epsilon(x)|^2 dx & = & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x.z}(f * g_\epsilon)\hat{}(z)\overline{f * g_\epsilon(x)} dx dz \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n}(f * g_\epsilon)\hat{}(z)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x.z}\overline{f * g_\epsilon(x)} dx\right) dz \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n}(f * g_\epsilon)\hat{}(z)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} f * g_\epsilon(x) dx\right)} dz \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n}(f * g_\epsilon)\hat{}(z)\overline{(f * g_\epsilon)\hat{}(z)} dz \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g_\epsilon)\hat{}|^2(z) dz\end{array}$$

como $\|f * g_\epsilon\|_2 \to \|f\|_2$ y $\|(f * g_\epsilon)\hat{}\|_2 \to \|\widehat{f}\|_2$, cuando $\epsilon \to 0$.
Finalmente tenemos que $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ que es lo que queríamos.
□
Ahora, gracias al teorema de Plancherel, vemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccc}\hat{} : & L^1 \cap L^2 & \to & L^2 \\ & f & \mapsto & \widehat{f}\end{array}$$

es una isometría, como $L^1 \cap L^2$ es un subespacio denso en L^2 podemos extenderlo a todo el espacio L^2, gracias a ello podemos definir la transformada de Fourier en todo L^2, vía:

$$\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$$

donde f_n es una sucesión en $L^1 \cap L^2$ que tiende a f en L^2. Gracias a que es una isometría en un conjunto denso, esta propiedad se seguirá preservando para todo el espacio L^2. Y en este sentido la transformada de Fourier es un automorfismo de L^2 de norma unitaria.
Observe que para el caso general, L^p, si quisiéramos usar la misma técnica, deberíamos tener que $f_n \to f$ en L^p implica que $\{\widehat{f_n}\}_n$ es una secuencia de Cauchy sobre algún espacio, donde a los f_n los escogemos en algún subconjunto denso de L^p, las posibles opciones que tenemos son:

- Funciones simples.
- Las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto.
- La intersección $L^1 \cap L^p$.

3.3. Comparación entre f y $\widehat{f}$

Hasta ahora hemos probado que, donde tenga sentido, $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$ y $\|f\|_2 = \|f\|_2$, no sabemos en general que tipo de comparaciones se puede tener entre $\|f\|_p$ y $\|\widehat{f}\|_q$, es decir qué valores de p y q son admisibles. Usaremos dicha desigualdad,

para probar que la transformada de Fourier puede ser definida en los espacios L^p, donde $1 \leq p \leq 2$.
Dado $f \in L^1 \cap L^2$ consideremos $g_\lambda(x) = f(\lambda x)$, donde $\lambda > 0$, entonces

$$\widehat{g}_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} g_\lambda(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.z} f(\lambda x)dx$$

después de un cambio de variable tenemos que $\widehat{g}_\lambda(z) = \lambda^{-n}\widehat{f}\left(\frac{z}{\lambda}\right)$, entonces

$$\|\widehat{g}_\lambda\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\lambda^{-n}\widehat{f}\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right|^q dz\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right|^q dz\right)^{\frac{1}{q}},$$

y por lo tanto

$$\|\widehat{g}_\lambda\|_q = \lambda^{-n+\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(z)|^q dz\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-n+\frac{n}{q}}\|\widehat{f}\|_q$$

Por otro lado, $\|g_\lambda\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}$ y después de un cambio de variable, nos queda que $\|g_\lambda\|_p = \lambda^{-\frac{n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_p$. Luego si queremos una desigualdad del tipo

$$\|\widehat{f}\|_q \leq C\|f\|_p$$

para alguna constante $C > 0$, entonces debemos tener que

$$\|\widehat{g}_\lambda\| = \lambda^{-n+\frac{n}{q}}\|\widehat{f}\|_q \leq C\|g_\lambda\|_p = C\lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_p.$$

Supongamos entonces dos casos

1. Si $-1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} > 0$, la desigualdad de arriba nos queda

$$\lambda^{-n+\frac{n}{q}+\frac{n}{p}}\|\widehat{f}\|_q \leq C\|f\|_p$$

   lo que no siempre se va a cumplir, pues si consideramos $\lambda \to +\infty$ y $\|\widehat{f}\|_q \neq 0$ el término izquierdo va a infinito, entonces dicho C no puede existir .

2. Si $-1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} < 0$, la desigualdad de arriba nos queda

$$\lambda^{-n+\frac{n}{q}+\frac{n}{p}}\|\widehat{f}\|_q \leq C\|f\|_p$$

   lo que no siempre se va a cumplir, pues si consideramos $\lambda \to 0^+$ y $\|\widehat{f}\|_q \neq 0$ el término izquierdo va a infinito, entonces dicho C no puede existir.

Así concluimos que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, diremos en éste caso que p y q son conjugados. Ya vimos que pasa cuando $p = 1$ y $p = 2$.

Para $p > 2$, consideremos a la familia de funciones Gaussianas

$$G_\alpha(x) = e^{-\alpha\pi|x|^2}$$

donde $\alpha = a + ib$, con $a > 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|G_\alpha\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-\alpha\pi|x|^2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (ap)^{-\frac{n}{2p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (ap)^{-\frac{n}{2p}} \\
\|\widehat{G_\alpha}\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\alpha^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\alpha}}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |\alpha|^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{aq}{|\alpha|^2}\right)^{-\frac{n}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |\alpha|^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{aq}{|\alpha|^2}\right)^{-\frac{n}{2q}}
\end{aligned}$$

si existiera un valor $C > 0$ tal que $\|\widehat{f}\|_q \leq C\|f\|_p$ valga, entonces debe valer

$$\begin{aligned}
|\alpha|^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{aq}{|\alpha|^2}\right)^{-\frac{n}{2q}} &\leq C\,(ap)^{-\frac{n}{2p}} \\
|\alpha|^{-\frac{n}{2}} a^{-\frac{n(p-q)}{2pq}} q^{-\frac{n}{2q}} p^{\frac{n}{2p}} &\leq C
\end{aligned}$$

tomando $b = 1$ y $a \to 0^+$, el término izquierdo tiende a $+\infty$, pues $p > 2 > q$, entonces dicho C no puede existir.
Falta ver qué pasa con $1 < p < 2$, para ello enunciaremos el siguiente teorema

Teorema 3.4. *Dada $f \in C_0^\infty$ y $1 \leq p \leq 2$ entonces*

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

en particular, $\widehat{f} \in L^{p'}$.

Demostración. Basta suponer que $1 < p < 2$.
Sean $A_m = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^m < |f(x)| \leq 2^{m+1}\}$ y $f_m = f\chi_{A_m}$. Ya que $f \in L^p$ y

$$F_m = \sum_{i=-m}^{m} f_m$$

son tales que $F_m \to f$ y $|F_m|^p \leq |f|^p$, sigue del teorema de convergencia dominada que

$$\|F_m\|_p \to \|f\|_p.$$

Sigue de la desigualdad de Hölder y dado que $p' > 2$

$$\begin{array}{rcl} \||\widehat{f_m}|^{p'}\|_1 & \leq & \||\widehat{f_m}|^{p'-2}\|_\infty\||\widehat{f_m}|^2\|_1 \\ \|\widehat{f_m}\|_{p'} & \leq & \|\widehat{f_m}\|_\infty^{1-\frac{2}{p'}}\|\widehat{f_m}\|_2^{\frac{2}{p'}} \end{array}$$

de lo ya visto tenemos que $\|\widehat{f_m}\|_\infty \leq \|f_m\|_1$ y $\|\widehat{f_m}\|_2 = \|f_m\|_2$, luego

$$\|\widehat{f_m}\|_{p'} \leq \|f_m\|_1^{1-\frac{2}{p'}}\|f_m\|_2^{\frac{2}{p'}}.$$

Ahora, note que $\|f_m\|_1 \leq |A_m|2^{m+1}$ y $\|f_m\|_2 \leq |A_m|^{\frac{1}{2}}2^{m+1}$, de ello

$$\begin{array}{rcl} \|\widehat{f_m}\|_{p'} & \leq & (|A_m|2^{m+1})^{1-\frac{2}{p'}}\left(|A_m|^{\frac{1}{2}}2^{m+1}\right)^{\frac{2}{p'}} \\ & \leq & |A_m|^{1-\frac{1}{p'}}2^{m+1} = |A_m|^{\frac{1}{p}}2^{m+1} \\ & \leq & 2\|f_m\|_p. \end{array}$$

Por otro lado, ya que $f \in C_0^\infty$ entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|f\|_\infty < M$. Dado $m \geq M$

$$\begin{array}{rcl} \left|\widehat{f}(z) - \widehat{F_m}(z)\right| & = & \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x.z}\left(f(x) - F_m(x)\right)dx\right| \\ & \leq & \int_{\mathbb{R}^n}|f(x) - F_m(x)|\,dx \\ & \leq & 2^{-m}|A| \end{array}$$

donde A es el soporte de f. Así si $m \to \infty$ entonces $\widehat{F_m}(z) \to \widehat{f}(z), \forall z \in \mathbb{R}^n$. Regresando a la desigualdad $\|\widehat{f_m}\|_{p'} \leq 2\|f_m\|_p$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \|\widehat{F_m}\|_{p'} & = & \sum_{i=1}^m \|\widehat{f_i}\|_{p'} \\ & \leq & 2\sum_{i=1}^m \|f_m\|_p \\ & \leq & 2\|f\|_p \end{array}$$

sigue del teorema de la convergencia dominada que $\widehat{f} \in L^{p'}$ y más aún vale $\|\widehat{f}\|_{p'} \leq 2\|f\|_p$. Como ya comentamos, esto basta para poder extender la definición de transformada de Fourier a espacios L^p y tenemos la desigualdad

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq 2\|f\|_p$$

para todo $f \in L^p$. Sin embargo no es la desigualdad que prometimos y para ello dado $m \in \mathbb{N}$ defina $f^{(m)} : (\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}$ por $f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1)\ldots f(x_m)$ y por tanto $\|f^{(m)}\|_p = (\|f\|_p)^m$, por otro lado

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f^{(m)}}(z_1, \ldots, z_m) & = & \int_{(\mathbb{R}^n)^m} e^{-2i\pi(x_1,\ldots,x_m).(z_1,\ldots,z_m)}f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m)dx_1\ldots dx_m \\ & = & \widehat{f}^{(m)}(z_1, \ldots, z_m) \end{array}$$

y de ello $\|\widehat{f^{(m)}}\|_{p'} = \left(\|\widehat{f}\|_{p'}\right)^m$. De lo ya probado

$$\begin{aligned} \|\widehat{f^{(m)}}\|_{p'} &\leq 2\|f^{(m)}\|_p \\ \left(\|\widehat{f}\|_{p'}\right)^m &\leq 2\left(\|f\|_p\right)^m \end{aligned}$$

por tanto para todo $m \in \mathbb{N}$ $\|\widehat{f}\|_{p'} \leq 2^{\frac{1}{m}}\|f\|_p$. Tomando $m \to \infty$ obtenemos

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

que es lo que deseábamos.

$\square$

Una mejor constante puede ser vista en [3], que de hecho es la mejor constante que se puede encontrar.

Esto concluye nuestro estudio de la comparación entre f y $\widehat{f}$.

Capítulo 4

Desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev

Entonces, continuando con el entendimiento del comportamiento de una partícula p, tenemos a la función f que modela su posición. Supongamos por un instante que esta función además de estar en el espacio L^2 es una función diferenciable, donde $\nabla f \in L^2$, entonces la energía cinética de esta partícula, viene dado por

$$T_f = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(x)|^2 dx$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck.
Entonces surge la pregunta, si podemos acotar este valor inferior o superiormente. Es claro que no puede ser hecho superiormente (considere por ejemplo las funciones de Gauss). Sin embargo lograremos acotarlo inferiormente. A este tipo de desigualdades las llamaremos desigualdades de incertidumbre, las cuales nos brindarán infromación cualitativa acerca de un partícula (y en general de un sistemas de partículas).

4.1. Operador Maximal de Hardy-Littlewood

Definición 4.1. Dada $f \in L^1_{loc}$, denotemos por Mf, al operador maximal de Hardy-Littlewood, el cual esta dado por:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy$$

A primera vista es bastante forzada la introducción de este operador, sin embargo planteemos un ejemplo más general.
Tomemos una bola $B_r(x)$, de radio r y de centro $x \in \mathbb{R}^n$, entonces dicha bola tiene

volumen r^nV, donde V es el volumen de la bola de radio 1 y centro en el origen. Entonces tenemos que $\chi_{B_r(x)} \in L^1$, y su integral es r^nV, luego

$$|f| * \chi_{B_r(x)}(y) = \int_{\mathbb{R}}^{n} |f(z)|\chi_{B_r(x)}(y-z)dz = \int_{B_r(x)} |f(z)|dz$$

así $g_r = |f| * (\frac{1}{r^n}\chi_{B_r(x)}) = \frac{1}{r^n}\int_{B_r(x)} |f(z)|dz = \frac{V}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(z)|dz$, ya antes hemos visto que $g_r \to Vf$ cuando $r \to 0$. Es decir que nuestro operador trata de almacenar toda la información que estas convoluciones nos pueden ofrecer.

Lema 4.1 (Lema del cubrimiento de Vitalli)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una famila de bolas de radio positivo y acotado. Entonces posee una subfamilia enumerable o finita $\{B_i\}_{\mathbb{N}}$ de elementos disjuntos dos a dos tal que*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} 5B_i$$

donde $5B_i$ es la bola con el mismo centro que B_i pero con radio quintuplicado.

Demostración. Sean $R = sup\{r : r \text{ es radio de } B \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{F}_n = \{B \in \mathcal{F} : \text{radio de B} \in \left(\frac{R}{2^n}, \frac{R}{2^{n-1}}\right]\}$. Note que $\mathcal{F} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_m$.
Sea $\mathcal{H}_1$ el conjunto de familias disjuntas dos a dos de bolas de $\mathcal{F}_1$, ya que para una bola $B \in \mathcal{F}_1$ tenemos $\{B\} \in \mathcal{H}_1$, dicho conjunto $\mathcal{H}_1$ es no vacío, si $\mathcal{F}_1$ es no vacío. Nuestro objetivo es aplicar el lema de Zorn[1], para ello falta probar que dada una familia $\{G_\lambda\}_\lambda$ de elementos de $\mathcal{H}_1$ tal que $G_\lambda \subset G_\mu$ si $\lambda < \mu$ existe un elemento de $\mathcal{H}_1$ que contiene a todos los $\{G_\lambda\}_\lambda$. Con ése propósito tomemos $G = \cup_\lambda G_\lambda$.
Observe primero que todo bola de G es elemento de algún G_λ y por tanto sus elementos son bolas de $\mathcal{F}_1$. Segundo, si B_1, B_2 son elementos de G con $B_1 \in G_{\lambda_1}$ y $B_2 \in G_{\lambda_2}$, tomando $\lambda = max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, note que $B_1, B_2 \in G_\lambda$ y por definición de los G_λ, B_1 y B_2 deben ser disjuntos. Así concluímos que $G \in \mathcal{H}_1$.
Sigue del lema de Zorn que $\mathcal{H}_1$ posee un elemento maximal, digamos G_1. Sobre $\mathbb{R}^n$, tomemos $\mathbb{Q}^n$, un conjunto denso y enumerable; para cada elemento de G_1 escojamos un elemento $p \in \mathbb{Q}^n$. Dicha elección es única para cada bola, pues son disjuntas y al ser un subconjunto de $\mathbb{Q}^n$ debe ser enumerable. Por lo tanto, la familia G_1 es enumerable.
Inductivamente construiremos las familias G_n. Sea $\mathcal{H}_n$ el conjunto de familias disjuntas dos a dos de bolas de $\mathcal{F}_n$ que no intersecan a ningún elemento de $\bigcup_{i<n} G_i$. No existiera una bola con esta propiedad, tomaremos G_n siendo el vacío, y si existiese alguna digamos la bola B, tenemos que $\{B\} \in \mathcal{H}_n$ y por tanto dicho conjunto $\mathcal{H}_n$ es no vacío. Similar al caso $n = 1$, sigue del lema de Zorn que existe una familia

[1] Puede ver un enunciado completo en [1, Capítulo 1].

maximal G_n que es la que tomamos.
Sea $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ familia enumerable de bolas disjuntas de $\mathcal{F}$. Sea $B \in \mathcal{F}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \mathcal{F}_n$. Si $B \notin G$, al ser G_n maximal entonces $B = B_r(x)$ debe intersecar a algún elemento de G_n, llamémosle $B' = B_s(y)$, como B y B' están en $\mathcal{F}_n$ entonces $r \leq 2s$. Dado $w \in B \cap B'$, entonces $|w-x| < r$ y $|w-y| < s$, sigue de la desigualdad triangular que $|x-y| < r+s \leq 3s$. Si $z \in B$ entonces $|z-x| < r$, nuevamente de la desigualdad triangular $|z-y| < 3s + r \leq 5s$ y por tanto $B \subset B_{5s}(y)$.
□

Teorema 4.1 (Desigualdad Maximal de Hardy Littlewood)**.** *Se tiene que*

1. *Estimativa débil: Sea $f \in L^1$, entonces $\forall \lambda > 0$ se tiene que*

$$|\{Mf(x) > \lambda\}| < \frac{5^n}{\lambda}\|f\|_1.$$

2. *Estimativa fuerte: Sea $f \in L^p$, $1 < p \leq \infty$, entonces se tiene que*

$$\|Mf\|_p \leq \left(\frac{p5^n 2^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

Demostración. 1. Tomemos $x \in A_\lambda = \{Mf(x) > \lambda\}$, entonces existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|dy > \lambda$$

luego se tiene que

$$A_\lambda \subset \bigcup_{x\in A_\lambda} B_r(x)$$

por el lema anterior, existe una subfamilia enumerable, $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que dichas bolas son disjuntas y $A_\lambda \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{5r_i}(x_i)$. Ahora, se tiene que

$$\lambda|B_{r_i}(x_i)| < \int_{B_{r_i}(x_i)} |f(x)|dx$$

luego si tomamos la suma sobre todos los $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda|B_{r_i}(x_i)| & < & \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_{r_i}(x_i)} |f(x)|dx \\ & < & \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \end{array}$$

desde que los abiertos son disjuntos. Por otro lado

$$\lambda|A_\lambda| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\,|B_{5r_i}(x_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda 5^n |B_{r_i}(x_i)|$$

desde que $A_\lambda \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{5r_i}(x_i)$, finalmente tenemos que:

$$|A_\lambda| < 5^n \frac{\|f\|_1}{\lambda}$$

que es lo que queríamos.

2. Consideremos nuevamente los conjuntos

$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda < Mf(x)\}$$

para cada $\lambda > 0$ y la aplicación

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & , |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ 0 & , |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

es tal que $g_\lambda \in L^1$, pues si $g_\lambda(x) \neq 0$, entonces $|g_\lambda(x)| = |f(x)| > 2^{r-1}$. Luego tenemos que

$$\int_{g_\lambda(x)\neq 0} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^p dx < \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$$

por lo tanto $g_\lambda \in L^p$ y el conjunto de los puntos donde $g_\lambda(x) \neq 0$ es de medida finita, por tanto $g_\lambda \in L^1$. Por el primer ítem tenemos que

$$\left|\{Mg_\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}\}\right| < 5^n \frac{2\|g_r\|_1}{\lambda}.$$

Si $Mf(x) > \lambda$, entonces existe $s > 0$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \lambda|B_s(x)| & < & \int_{B_s(x)} |f(y)|dy \\ & < & \int_{B_s(x)\cap\{|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} |f(y)|dy + \int_{B_s(x)\cap\{|f(x)|\leq\frac{\lambda}{2}\}} |f(y)|dy \\ & < & \int_{B_s(x)} |g_\lambda(y)|dy + \frac{\lambda}{2}|B_s(x)| \end{array}$$

entonces

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{1}{|B_s(x)|} \int_{B_s(x)} |g_\lambda(y)|dy.$$

Luego,

$$\{x : Mf(x) > \lambda\} \subset \{x : Mg_\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}\}$$

y por tanto,

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leq |\{x : Mg_\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}\}| < 2\frac{5^n}{\lambda}\|g_\lambda\|_1.$$

En ese sentido, tenemos que

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x : Mf(x) > \lambda\}|d\lambda \leq \int_0^\infty \lambda^{p-1} 2\frac{5^n}{\lambda}\|g_\lambda\|_1 d\lambda$$

como $\|g\|_1 = \int_{2|f(x)|>\lambda} |f(y)|dy$, entonces

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x : Mf(x) > \lambda\}|d\lambda \leq 5^n 2\int_0^\infty \lambda^{p-2}\int_{2|f(x)|>\lambda} |f(y)|dyd\lambda$$

gracias a Fubini, se tiene que

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x : Mf(x) > \lambda\}|d\lambda \leq 5^n 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{2|f(y)|} \lambda^{p-2}|f(y)|d\lambda dy$$

luego ya que $\int_0^{2|f(y)|} \lambda^{p-2}d\lambda = \frac{(2|f(y)|)^{p-1}}{p-1}$, tenemos

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x : Mf(x) > \lambda\}|d\lambda \leq \frac{5^n 2^p}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy.$$

Por otro lado, por Fubini se tiene

$$\begin{array}{rcl} \int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x : Mf(x) > \lambda\}|d\lambda & = & \int_0^\infty \lambda^{p-1}\int_{(\{x:Mf(x)>\lambda\})} dxd\lambda \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{Mf(x)} \lambda^{p-1}d\lambda dx \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{p}|Mf(x)|^p dx \end{array}$$

de estos resultados sigue

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx \leq \frac{p5^n 2^p}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy$$

es decir

$$\|Mf\|_p \leq \left(\frac{p5^n 2^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

que es lo que queríamos.

□

4.2. Desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev

Teorema 4.2 (Desigualdad de Hardy-Littlewood)**.** *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \lambda < n$, $p, q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{q} = 2$. Entonces, existe una constante $C > 0$,* *independiente de f y g, tal que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|x-y|^{-\lambda}g(y)dxdy\right| \leq C\|f\|_p\|g\|_q$$

Demostración. Primero veamos que

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{-\lambda}f(y)dy$$

es una función en $L^{q'}$. Dado $\delta>0$, consideremos la suma

$$F(x)=\int_{B_\delta(x)}|x-y|^{-\lambda}f(y)dy+\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x)}|x-y|^{-\lambda}f(y)dy$$

donde $G_\delta(x)=\int_{B_\delta(x)}|x-y|^{-\lambda}f(y)dy$ y $H_\delta(x)=\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x)}|x-y|^{-\lambda}f(y)dy$. Para cada $j\in\mathbb{N}$ consideremos los anillos $E_j:=B_{\frac{\delta}{2^{j-1}}}(x)\setminus B_{\frac{\delta}{2^j}}(x)$, luego tenemos:

$$\begin{array}{rcl} |G_\delta(x)| & = & \left|\int_{B_\delta(x)}|x-y|^{-\lambda}f(y)dy\right| \\ & = & \left|\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j}|x-y|^{-\lambda}f(y)dy\right| \end{array}$$

este valor en principio no tiene que ser finito, sin embargo la siguiente desigualdad es válida admitiendo la existencia de términos con valor infinito

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j}|x-y|^{-\lambda}f(y)dy\right|\leq\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j}|x-y|^{-\lambda}|f(y)|dy$$

luego tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j}|x-y|^{-\lambda}|f(y)|dy & \leq & \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j}\left(\frac{\delta}{2^j}\right)^{-\lambda}|f(y)|dy \\ & \leq & \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B_{\frac{\delta}{2^{j-1}}}(x)}\left(\frac{\delta}{2^j}\right)^{-\lambda}|f(y)|dy \\ & \leq & \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\delta}{2^j}\right)^{-\lambda}\left|B_{\frac{\delta}{2^{j-1}}}(x)\right|Mf(x) \end{array}$$

donde la primera desigualdad es cierta pues si $y\in E_j$, entonces

$$|x-y|^{-\lambda}\leq\left(\frac{\delta}{2^j}\right)^{-\lambda}.$$

La segunda, porque $E_j\subset B_{\frac{\delta}{2^{j-1}}}(x)$ y la tercera, por la propia definición de función maximal. Sea V el volumen de la bola unitaria, entonces

$$\left|B_{\frac{\delta}{2^{j-1}}}(x)\right|=\left(\frac{\delta}{2^{j-1}}\right)^nV$$

reemplazando tenemos

$$|G_\delta(x)| \leq V2^n\delta^{n-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(n-\lambda)j}Mf(x)$$

como $\lambda < n$, entonces la suma

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(n-\lambda)j} = \frac{2^{-n+\lambda}}{1-2^{-n+\lambda}}$$

y tenemos

$$|G_\delta(x)| \leq \frac{V2^\lambda\delta^{n-\lambda}Mf(x)}{1-2^{-n+\lambda}}.$$

Por otro lado,

$$H_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x)} |x-y|^{-\lambda}f(y)dy$$

donde por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |H_\delta(x)| & \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x)} |x-y|^{-\lambda p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_\delta^\infty t^{-\lambda p'}t^{n-1}dtd\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \\ & \leq & \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\delta^{-\lambda p'+n}}{\lambda p'-n}d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \\ & \leq & \left(W\frac{\delta^{-\lambda p'+n}}{\lambda p'-n}\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \end{array}$$

donde W es el volumen de la superficie esférica S^{n-1}. De estas desigualdades, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} |F(x)| & \leq & |G_\delta(x)| + |H_\delta(x)| \\ & \leq & \frac{V2^\lambda\delta^{n-\lambda}Mf(x)}{1-2^{-n+\lambda}} + \left(W\frac{\delta^{-\lambda p'+n}}{\lambda p'-n}\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \end{array}$$

y ésto es válido para todo $\delta > 0$, luego si consideramos la función

$$p(\delta) = \frac{V2^\lambda\delta^{n-\lambda}Mf(x)}{1-2^{-n+\lambda}} + \left(W\frac{\delta^{-\lambda p'+n}}{\lambda p'-n}\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p$$

es claro que es diferenciable y veamos cuál es su valor mínimo. Si $Mf(x) = 0$ entonces f debe ser nula c.t.p. y en dicho caso la desigualdad es claramente satisfecha, caso contrario $Mf(x), \|f\|_p > 0$ y es lo que supondremos en adelante.
Dado que $n - \lambda > 0$, entonces si $\delta \to +\infty$, se tiene

$$\frac{V2^\lambda\delta^{n-\lambda}Mf(x)}{1-2^{-n+\lambda}} \to +\infty.$$

Por otro lado, por las hipótesis $\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'}$ tenemos

$$\frac{\lambda}{n} - \frac{1}{p'} > 0$$

luego $\frac{n}{p'} - \lambda < 0$ y por lo tanto

$$\left(W \frac{\delta^{-\lambda p' + n}}{\lambda p' - n} \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \to +\infty$$

si $\delta \to 0^+$. Dado que $p(\delta) \to \infty$, existe $b > 1$ tal que $p(\delta) > p(1), \forall \delta > b$; similarmente, existe $a < 1$ tal que $p(\delta) > p(1), \forall a > \delta > 0$. Como p es continua, posee un mínimo en $[a, b]$ y dicho mínimo es el mínimo en $(0, \infty)$.
Para calcular dicho valor mínimo explícitamente tomemos la derivada de la función p:

$$p'(\delta) = (n - \lambda)\delta^{n-\lambda-1} \left(\frac{V 2^{\lambda} Mf(x)}{1 - 2^{-n+\lambda}} \right) + \left(\frac{n}{q'} \right) \delta^{-\lambda + \frac{n}{p'} - 1} \left(\frac{W}{\lambda p' - n} \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p$$

cuyo único punto crítico es tomado cuando

$$\delta = \left(\frac{n \|f\|_p (1 - 2^{-n+\lambda})}{q'(n - \lambda) V 2^{\lambda} Mf(x)} \right)^{\frac{p}{n}} \left(\frac{q' W}{n} \right)^{\frac{p-1}{n}}$$

y para dicho valor de δ

$$\begin{aligned} p(\delta) &= \|f\|_p^{\frac{p(n-\lambda)}{n}} Mf(x)^{\frac{p}{q'}} \Bigg(\left[\tfrac{n}{q'(n-\lambda))} \right]^{\frac{p(n-\lambda)}{n}} \left[\tfrac{V 2^{\lambda}}{1 - 2^{n-\lambda}} \right]^{\frac{p}{q'}} \left[\tfrac{q' W}{n} \right]^{\frac{(p-1)(n-\lambda)}{n}} \\ &\qquad + \left[\tfrac{V 2^{\lambda}(n-\lambda)}{1 - 2^{n-\lambda}} \right]^{\frac{p}{q'}} \left[\tfrac{n}{q'} \right]^{\frac{\lambda}{n}} [W]^{\frac{\lambda}{n} - \frac{p}{q'}} \Bigg) \end{aligned}$$

donde se tiene que la expresión en la izquierda puede escribirse como

$$p(\delta) = K \|f\|_p^{\frac{p(n-\lambda)}{n}} Mf(x)^{\frac{p}{q'}}$$

donde el valor de dicho K, sólo depende de p, q, λ y n, decir es independiente de x y f. Luego

$$|F(x)| \leq K \|f\|_p^{\frac{p(n-\lambda)}{n}} Mf(x)^{\frac{p}{q'}}$$

después, calculemos el valor de $\|F\|_{q'}$,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^{q'} dx &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} K^{q'} \|f\|_p^{\frac{q' p(n-\lambda)}{n}} Mf(x)^p dx \\ &\leq K^{q'} \|f\|_p^{q'-p} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p dx \end{aligned}$$

ya vimos que $\|Mf\|_p \leq C_2\|f\|_p$, por el teorema anterior, luego

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^{q'} dx & \leq & C_2 K^{q'} \|f\|_p^{q'-p} \|f\|_p^p \\ & \leq & C_2 K^{q'} \|f\|_p^{q'} \end{array}$$

por lo tanto $F \in L^{q'}$, que es lo que queríamos. Finalmente, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{array}{rcl} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)|x-y|^{-\lambda} g(y) dx dy \right| & = & \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(y) g(y) dy \right| \\ & \leq & \|F\|_{q'} \|g\|_q \\ & \leq & C\|f\|_p \|g\|_q \end{array}$$

con $C = C_2^{\frac{1}{q'}} K$, lo que termina el teorema.
□

4.3. Distribuciones: Definición y Propiedades

Definición 4.2. Sobre el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto, diremos que la familia de funciones $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{R}^n}$ converge a ϕ, si existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, tal que $supp\phi_i, supp\phi \subset K$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$D^\alpha \phi_i \to D^\alpha \phi$$

uniformemente en K. Con esta convergencia, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ será denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ o simplemente $\mathcal{D}$.
Ahora, definiremos al espacio de funcionales lineales y continuos de $\mathcal{D}$ como aquellas aplicaciones $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ para las que

$$\phi_i \to \phi \Rightarrow T(\phi_i) \to T(\phi)$$

A este espacio lo denotaremos por $\mathcal{D}'$ y será llamado espacio de distribuciones sobre $\mathcal{D}$.

Ejemplo 3.

1. Dada una función $f \in L^1_{loc}$, tenemos que la funcional lineal:

$$\begin{array}{rrcl} T_f : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x) dx \end{array}$$

   está bien definida, pues si $\phi \in \mathcal{D}$, entonces $supp(\phi) = K$ es compacto y ϕ está acotado por un valor M y por tanto se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx = \int_K f(x)\phi(x)dx$$

este valor es finito.
Por otro lado esta funcional es continua. Si $\phi_i \to \phi$ en $\mathcal{D}$, entonces existe K tal que $supp\phi_i,\ supp\phi \subset K$ y $\phi_i \to \phi$ uniformemente en K. Tenemos

$$|T_f(\phi) - T_f(\phi_i)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\phi(x) - \phi_i(x))dx \right|$$

si $x \notin K$, entonces $\phi_i(x) = \phi(x) = 0$, luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\phi(x) - \phi_i(x))dx = \int_K f(x)(\phi(x) - \phi_i(x))dx.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$|\phi_i(x) - \phi(x)| < \frac{\epsilon}{(\|f\|_1 + 1)},\ \forall i > N.$$

y se tiene que

$$|T_f(\phi) - T_f(\phi_i)| < \|f\|_1 \left(\frac{\epsilon}{(\|f\|_1 + 1)} \right) < \epsilon$$

y ésto para todo $i > N$. Por lo tanto $T_f(\phi_i) \to T_f(\phi)$.
En particular vemos que si $f \in L^p \subset L^1_{loc}$, entonces se define del mismo modo T_f. Si dada una distribución T, existe $f \in L^p$ tal que $T = T_f$, diremos que $T \in L^p$.

2. La aplicación delta de Dirac. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, considere la aplicación

$$\begin{array}{rccl} T_x: & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & T_x(\phi) := \phi(x). \end{array}$$

En general cuando $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definiremos $T_{x,\alpha}$

$$\begin{array}{rccl} T_{x,\alpha}: & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & T_{x,\alpha}(\phi) := D^\alpha\phi(x). \end{array}$$

Así definidos, son aplicaciones bien definidas y lineales; la continuidad viene inmeditamente del hecho que si $\phi_i \to \phi$, dada la convergencia uniforme sobre un compacto y dado que las funciones son nulas fuera de dicho compacto, entonces $D^\alpha\phi_i(x) \to D^\alpha\phi(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

3. Si $S, T \in \mathcal{D}'$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $S+T$ y λT son también funcionales continuos.

4. Dado $T \in \mathcal{D}'$, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ podemos generar un nuevo funcional $D^\alpha T$, el cual esta dado por la regla

$$\begin{array}{rccl} D^\alpha T: & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & D^\alpha T(\phi) := T(D^\alpha \phi). \end{array}$$

   Desde que $D^\alpha(\lambda\phi + \varphi) = \lambda D^\alpha\phi + D^\alpha\varphi$, $\forall \phi, \varphi \in \mathcal{D}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $D^\alpha T$ es un funcional lineal, para ver que este funcional es continuo consideremos $\phi_i \to \phi$ en $\mathcal{D}$, entonces existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, tal que $supp\phi_i, supp\phi \subset K$ y para todo $\beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$D^\beta\phi_i \to D^\beta\phi$$

   uniformemente en K. Entonces $D^\beta D^\alpha\phi_i \to D^\beta D^\alpha\phi$ uniformemente en K, luego $D^\alpha\phi_i \to D^\alpha\phi$ y como T es continuo entonces $T(D^\alpha\phi_i) = D^\alpha T(\phi_i) \to T(D^\alpha\phi) = D^\alpha T(\phi)$.
   Dicho funcional $D^\alpha T$ será llamado la α-ésima derivada de T.

5. Dado $T \in \mathcal{D}'$ y $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definiremos el funcional $\psi * T$

$$\begin{array}{rccl} \psi * T: & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & \psi * T(\phi) := T(\psi * \phi). \end{array}$$

   desde que $\psi * (\lambda\phi + \varphi) = \lambda\psi * \phi + \psi * \varphi$, $\psi * T$ es un funcional lineal, para ver que este funcional es continuo consideremos $\phi_i \to \phi$ en $\mathcal{D}$, entonces existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, tal que $supp\phi_i, supp\phi \subset K$ y para todo $\beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$D^\beta\phi_i \to D^\beta\phi$$

   uniformemente en K. Entonces $\psi * D^\alpha\phi_i = D^\alpha(\psi * \phi_i) \to \psi * D^\alpha\phi = D^\alpha(\psi * \phi)$ uniformemente en K, luego $\psi * \phi_i \to \psi * \phi$ en $\mathcal{D}$ y como T es continuo entonces $\psi * T(\phi_i) = T(\psi * \phi_i) \to \psi * T(\phi) = T(\psi * \phi)$.
   Dicho funcional $\psi * T$ será llamado la convolución de ψ con T.

6. Dado $T \in \mathcal{D}'$, definiremos el funcional $\widehat{T}$

$$\begin{array}{rccl} \widehat{T}: & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & \widehat{T}(\phi) := T(\widehat{\phi}). \end{array}$$

desde que $(\lambda\phi+\varphi)\widehat{\ } = \lambda\widehat{\phi} + \widehat{\varphi}$, $\widehat{T}$ es un funcional lineal, para ver que este funcional es continuo consideremos $\phi_i \to \phi$ en $\mathcal{D}$, entonces existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, tal que $supp\phi_i, supp\phi \subset K$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$D^\alpha \phi_i \to D^\alpha \phi$$

uniformemente en K. Entonces $D^\alpha \widehat{\phi_i} \to D^\alpha \widehat{\phi}$ uniformemente en K, luego $\widehat{\phi_i} \to \widehat{\phi}$ y como T es continuo entonces $T(\widehat{\phi_i}) = \widehat{T}(\phi_i) \to T(\widehat{\phi}) = \widehat{T}(\phi)$.
Dicho funcional $\widehat{T}$ será llamado transformada de Fourier de T.

Teorema 4.3. *En el sentido distribucional, se tiene que*

$$(C_\lambda |\bullet|^{-\lambda})\widehat{\ } = C_{n-\lambda} |\bullet|^{-(n-\lambda)},$$

donde $C_\lambda = \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)(\pi)^{-\frac{\lambda}{2}}$ *y* $\forall\ 0 < \lambda < n$.

Note que no puede ser en el sentido usual de transformada de Fourier, pues $|\ |^{-\lambda}$ no pertenece a L^2, pero sí es L^1_{loc}.

Demostración. Para ello basta ver que se tenga que

$$\int_{\mathbb{R}^n} C_\lambda |y|^{-\lambda} \widehat{f}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} C_{n-\lambda} |y|^{-(n-\lambda)} f(y)dy$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} C_\lambda |y|^{-\lambda}\widehat{f}(y)dy &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} C_\lambda |y|^{-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.y} f(x)dx\right)dy \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)(\pi|y|^2)^{-\frac{\lambda}{2}} e^{-2\pi i x.y} f(x)dxdy \end{aligned}$$

Sin embargo, gracias a que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ y con el cambio de variable $t \to \pi s|x|^2$, tenemos que $\Gamma(\alpha) = \pi|x|^2 \int_0^\infty e^{-\pi s|x|^2} s^{\alpha-1}ds$, luego reemplazando este resultado con $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} C_\lambda |y|^{-\lambda}\widehat{f}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty e^{-\pi s|x|^2} s^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{-2\pi i x.y} f(x)dsdxdy$$

como $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi s|x|^2} e^{-2\pi i x.y}dx = \left(e^{-\pi s|x|^2}\right)\widehat{\ }(y) = s^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|y|^2}{s}}$, luego

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} C_\lambda |y|^{-\lambda}\widehat{f}(y)dy &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty s^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|y|^2}{s}} s^{\frac{\lambda}{2}-1} f(y)dsdy \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty s^{-\frac{n-\lambda}{2}-1} e^{-\frac{\pi|y|^2}{s}} f(y)dsdy \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $s \to \frac{1}{s}$ y gracias a que $\Gamma(\alpha) = \pi|x|^2 \int_0^\infty e^{-\pi s|x|^2} s^{\alpha-1}ds$, con $\alpha = \binom{n-\lambda}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} C_\lambda |y|^{-\lambda}\widehat{f}(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty s^{\frac{n-\lambda}{2}+1}e^{-\pi s|y|^2}f(y)\tfrac{1}{s^2}dsdy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty s^{\frac{n-\lambda}{2}-1}e^{\pi s|y|^2}f(y)dsdy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} C_{n-\lambda}|y|^{n-\lambda}f(y)dy\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

□

4.4. Espacios de Sobolev: Definición y propiedades

Definición 4.3. En el espacio de funciones L^p, consideremos a una familia especial, aquellas que posean derivada distribucional L^p, es decir

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^p : D^\alpha f \in L^p,\ \forall|\alpha| \le m\}$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. En este espacio consideraremos la siguiente norma:

$$\|f\|_{W^{m,p},0} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_p$$

y en caso $1 \le p < \infty$, también consideraremos

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y si $p = \infty$, tomaremos $\|f\|_{W^{m,\infty}} = max_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha f\|_\infty$. Dichas normas son equivalente a la primera, gracias a la siguiente desigualdad para $a_i \ge 0$,

$$\left(\sum_{i=1}^t a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{i=1}^t a_i \le t\left(\sum_{i=1}^t a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde t es la cantidad de términos α con $|\alpha| \le m$. Dicho valor t es, explícitamente, $\binom{m+n-1}{m}$.

Es claro que $\mathcal{D} \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, la siguiente proposición nos deja claro cómo está incluido:

Proposición 4.1. *El espacio $\mathcal{D}$ es denso en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.*

Demostración. Sea $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, y ϕ una función bump. Llamemos $\phi_t(x) = \phi(\frac{x}{t})$ y $g_t(x) = (\frac{1}{t^n}\phi_t) * f(x)$ y finalmente tomemos $f_t = \phi_t g_t$.
Dado, α se tiene

$$\begin{aligned} D^\alpha f - D^\alpha f_t &= D^\alpha f - \textstyle\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \phi_t D^{\alpha-\beta} g_m \\ &= D^\alpha f - \phi_t D^\alpha f - \textstyle\sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \phi_t D^{\alpha-\beta} g_m \end{aligned}$$

la primera es la fórmula de Leibniz. Dado que ϕ_t es idénticamente 1 en $B_r(0)$ y cero en $B_R(0)$, $0 < r < R$, todas las derivadas de ϕ están acotadas por un valor C, también $D^\beta \phi_t(x) = \frac{1}{t^{|\beta|}}\phi(\frac{x}{t})$. Así para $t > 1$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f - D^\alpha g_t\|_p^p &\leq \textstyle\int_{\|x\|\leq rt} |D^\alpha f - D^\alpha g_t|^p dx + \int_{\|x\|\geq rt} (|D^\alpha f|^p + |D^\alpha g_t|^p) dx \\ &\quad + \textstyle\sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} C \int_{\|x\|\geq rt} |D^{\alpha-\beta} g_t|^p dx \end{aligned}$$

dado que $D^\beta g_t \to D^\beta f, t \to \infty$, se tiene que

1. $|(D^\alpha f - D^\alpha g_t)\chi_{B_r t(0)}|^p \leq |D^\alpha f - D^\alpha g_t|^p$

2. $(|D^\alpha f|^p + |D^\alpha g_t|^p)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_r t(0)} \leq |D^\alpha f|^p + |D^\alpha g_t|^p$

3. $|(D^{\alpha-\beta} g_t)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_r t(0)}|^p \leq |D^\alpha g_t|^p$

entonces por el teorema de la convergencia dominada las integrales de las funciones a la izquierda convergen, y convergen a cero. Luego existe $T > 0$, tal que $\|D^\alpha f - D^\alpha g_t\|_p < \epsilon$ para $t > T$, repetiendo el mismo argumento para todos los $\beta \leq \alpha$, que son finitos, termina la proposición.
□

Teorema 4.4 (Desigualdad de Sobolev)**.** *Sea* $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$*,* $1 < p < n$*, entonces* $f \in L^q$*, donde* $q = \frac{np}{n-p}$*, más aún existe una constante* $C > 0$ *tal que:*

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_p$$

Demostración. Primero supongamos que la proposición es válida en el espacio $\mathcal{D}$, sea $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tomemos una sucesión $f_i \to f$ en el espacio $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, donde $f_i \in \mathcal{D}$, entonces se tiene que

$$\|f_i\|_q \leq C\|\nabla f_i\|_p$$

gracias a la convergencia

$$\|f\|_q \leq C\|\nabla f\|_p.$$

Veamos entonces el caso cuando $f \in \mathcal{D}$. Sea $g \in L^{q'}$, entonces

$$\begin{array}{rcl} |\langle f,g\rangle| & = & |\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle| \\ & = & |\langle |\bullet|\widehat{f}, |\bullet|^{-1}\widehat{g}\rangle| \\ & = & |\langle (\nabla f)\widehat{\ }, |\bullet|^{-1}\widehat{g}\rangle| \end{array}$$

se tiene esto, desde que $(\nabla f)\widehat{\ } = \frac{1}{2\pi i}|\bullet|\widehat{f}$; por otro lado

$$|\bullet|^{-1}\widehat{g} = \frac{C_{n-1}}{C_1}\left(|\bullet|^{-(n-1)} * g\right)\widehat{\ }$$

aplicando nuevamente la transformada de Fourier, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |\langle f,g\rangle| & = & \frac{C_{n-1}}{C_1 2\pi}|\langle \nabla f, |\bullet|^{-(n-1)}\widehat{g}\rangle| \\ & \leq & C\|\nabla f\|_p\|g\|_{q'} \end{array}$$

la última desigualdad está dada por la desigualdad de $Hardy-Littlewood-Sobolev$. Así tenemos que

$$\|f\|_q = \sup\{|\langle f,g\rangle| : \|g\|_{q'} = 1\} \leq C\|\nabla f\|_p$$

que es lo que queríamos.

□

Capítulo 5

Ecuación no lineal de Schrödinger

Para este último capítulo nos centraremos en resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u + g(u) &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \\ u(0) &= \phi \end{aligned}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto, $u : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ es una función de clase C^2 e I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Esta ecuación depende de la función g, que en principio es arbitraria, y no podemos garantizar la existencia ni unicidad de las soluciones. Es por ello que nos centraremos en un caso particular.
La ecuación de Schrödinger modela la propagación de la luz en medios no homogéneos, cuando $g(u) = \lambda |u|^\alpha u$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\alpha \geq 0$. Por lo general se estudia el caso $\alpha = 2$. Usaré este capítulo para ejemplificar todo lo desarrollado en los capítulos anteriores, por ello $\Omega = \mathbb{R}^n$. Es recomendable leer a [2] para un estudio más amplio, sin embargo dicho trabajo excede lo visto hasta ahora.

5.1. Definiciones y primeros resultados

Definición 5.1. Dada la ecuación

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = \phi \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto, I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y g una funcion de clase C^2.

Diremos que $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una solución, si

$$u \in C(I, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(I, H^{-1}(\Omega))$$

donde consideraremos $u : I \to C(\Omega, \mathbb{R}^n)$[1] tal que

$$i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0$$

en $H^{-1}(\Omega)$, y $u_0 = \phi$.
La solución será única en H^1 si dado cualquier $\phi \in H_0^1(\Omega)$ y cualquier $I \ni 0$, cualquier par de soluciones coinciden en I.
La ecuación 5.1 estará bien definida en $H_0^1(\Omega)$ si

1. Para cada $\phi \in H_0^1(\Omega)$, existe una solución en un intervalo maximal $(-T_{min}, T_{max})$, con $T_{min} = T_{min}(\phi) \in (0, \infty]$, lo mismo para T_{max}.

2. Existe unicidad en H^1.

3. Si $T_{max} < \infty$ entonces,
$$\lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$$
análogamente, si $T_{min} < \infty$ entonces,
$$\lim_{t \to T_{min}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty.$$

4. La solución depende continuamente del valor inicial, es decir, si $\phi_n \to \phi$ en $H_0^1(\Omega)$ e $I \subset (-T_{min}(\phi), T_{max}(\phi))$ es un intervalo cerrado, entonces las soluciones u_n están definidas sobre I para n suficientemente grande y $u_n \to u$ en $C(I, H_0^1(\Omega))$.

De ahora en adelante, consideraremos que en (5.1) $g(u) = \lambda |u|^\alpha u$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\alpha \geq 0$.

Observación 4. Para alguna solución, se tienen las siguientes leyes de conservación

1. La norma L^2 de la solución es constante, es decir
$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\phi\|_2$$
Esto es cierto, desde que, multiplicando por $\bar{u}$, tenemos:
$$i\partial_t u\bar{u} + \Delta u\bar{u} + \lambda |u|^{\alpha+2} = 0$$

[1] $C^n(X, Y)$ es el espacio de funciones de clase C^n de X a Y, $C^0(X, Y) = C(X, Y)$

luego la parte imaginaria es

$$i\partial_t u\bar{u} + \Delta u\bar{u} - (-i\overline{\partial_t u}u + \Delta\bar{u}u) = 0$$

ahora integrando:

$$i\int_\Omega (\partial_t u\bar{u} + \overline{\partial_t u}u)(x)dx + \int_\Omega (\Delta u\bar{u} - \Delta\bar{u}u)(x)dx = 0$$

por otro lado,

$$\int_\Omega \Delta u\bar{u}(x)dx = -\int_\Omega \nabla u\nabla\bar{u}(x)dx = \int_\Omega u\Delta\bar{u}(x)dx$$

finalmente

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega u\bar{u}(x)dx = \int_\Omega (\partial_t u\bar{u} + \overline{\partial_t u}u)(x)dx = 0$$

luego, la función $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ es constante y vale $\|\phi\|_2$ para $t = 0$.

2. Al definir el operador energía:

$$E(v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v(x)|^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2}|v(x)|^{\alpha+2}\right) dx$$

Entonces, tenemos:

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = 0$$

análogamente, multiplicando por $\overline{\partial_t u}$, tenemos:

$$i\partial_t u\overline{\partial_t u} + (\Delta u)\overline{\partial_t u} + \lambda|u|^\alpha\overline{\partial_t u} = 0$$

luego la parte real es

$$\Delta u\overline{\partial_t u} + \lambda|u|^\alpha\overline{\partial_t u} + ((\Delta\bar{u})\partial_t u + \lambda|u|^\alpha\partial_t u) = 0$$

ahora integrando:

$$\int_\Omega (\Delta u\overline{\partial_t u} + \Delta\bar{u}\partial_t u)(x) + (\lambda|u|^\alpha\overline{\partial_t u} + \lambda|u|^\alpha\partial_t u)(x)dx = 0$$

ya vimos que

$$\int_\Omega (\Delta u)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u\nabla v(x)dx$$

finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{2}-\frac{\lambda |u|^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)dx &= \int_\Omega \frac{1}{2}\left\{\nabla(\partial_t u)\nabla \bar{u}+\nabla u \nabla(\overline{\partial_t u})\right. \\
&\qquad \left. -\lambda |u|^\alpha(\partial_t u+\overline{\partial_t u})\right\} dx \\
&= \int_\Omega -\left\{\Delta u \overline{\partial_t u}+\Delta \bar{u}\partial_t u+\right. \\
&\qquad \left. \lambda |u|^\alpha \partial_t u+\lambda |u|^\alpha \overline{\partial_t u}\right\} dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

luego, la función $E(u(t))$ es constante y vale $E(\phi)$ cuando $t=0$.

3. Al definir el operador momentum:

$$\rho(v)=Im\left(\int_\Omega v(x)\nabla \bar{v}(x)dx\right)$$

Entonces, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\rho(u(t))=0$$

por un lado, al multiplicar la ecuación por $\partial_i u$, tenemos

$$i\partial_t u\partial_i \bar{u}+\Delta u\partial_i \bar{u}+\lambda |u|^\alpha u\partial_i \bar{u}=0$$

luego tomando la parte real

$$i(\partial_t u\partial_i \bar{u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u)+\Delta u\partial_i \bar{u}+\Delta \bar{u}\partial_i u+\lambda |u|^\alpha[u\partial_i \bar{u}+\bar{u}\partial_i u]=0$$

y al integrar

$$\begin{aligned}
\int_\Omega i[\partial_t u\partial_i \bar{u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u]+\Delta u\partial_i \bar{u}+\Delta \bar{u}\partial_i u+\lambda |u|^\alpha[u\partial_i \bar{u}+\bar{u}\partial_i u]dx &= 0 \\
\int_\Omega i[\partial_t u\partial_i \bar{u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u]-\nabla u\nabla\partial_i \bar{u}-\nabla \bar{u}\nabla\partial_i u+\lambda |u|^\alpha \partial_i[u\bar{u}]dx &= 0 \\
\int_\Omega i[\partial_t u\partial_i \bar{u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u]-\partial_i(\nabla u\nabla \bar{u})+\lambda |u|^\alpha \partial_i[u\bar{u}]dx &= 0 \\
\int_\Omega i[\partial_t u\partial_i \bar{u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u]-\partial_i(|\nabla u|^2)+\partial_i \frac{\lambda |u|^{\alpha+2}}{2\alpha+4}dx &= 0 \\
\int_\Omega i[\partial_t u\partial_i \bar{u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u]-\frac{1}{2}\partial_i\left(2|\nabla u|^2-\frac{\lambda |u|^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)dx &= 0 \\
\int_\Omega i[\partial_t u\partial_i \bar{u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u]dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}}\partial_i\left(2|\nabla u|^2-\frac{\lambda |u|^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)dx_i dy &= 0
\end{aligned}$$

donde en el segundo término de la última igualdad, extendemos como cero fuera del soporte de u y por tanto

$$\int_\Omega i[\partial_t u\partial_i \bar{u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u]dx=0$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Im\int_\Omega u\overline{\partial_i u}dx &= \tfrac{1}{2i}\tfrac{d}{dt}\left[\int_\Omega u\overline{\partial_i u}-\bar{u}\partial_i u dx\right]\\ &= \tfrac{1}{2i}\int_\Omega \partial_t u\overline{\partial_i u}+u\partial_i\overline{\partial_t u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u-\bar{u}\partial_i\partial_t u dx\\ &= \tfrac{1}{2i}\int_\Omega 2(\partial_t u\overline{\partial_i u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u)+\partial_i(u\overline{\partial_t u}-\bar{u}\partial_t u)dx\end{aligned}$$

como arriba $\int_\Omega \partial_i(u\overline{\partial_t u}-\bar{u}\partial_t u)dx = 0$, luego

$$\frac{d}{dt}\rho(u(t)) = \frac{1}{2i}\int_\Omega 2(\partial_t u\overline{\partial_i u}-\overline{\partial_t u}\partial_i u)dx = 0$$

que es lo que queríamos probar.

5.2. Operadores Continuos

Esta sección la dedicaremos a un tema clásico y más general encontrado en [17, Capítulo 1] o en [1, Capítulo 7].
Dado $A : X \to X$ operador lineal y continuo, X un espacio de Hilbert con producto interno $(\bullet\ ,\bullet)$. Cuando

1. A autoadjunto: $(Ax, x) = (x, Ax)$.
2. $A \leq 0$: $(Ax, x) \leq 0$

Entonces A genera el semigrupo $\{\mathcal{S}(t) : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$.
También al considerar iA, se tiene

1. iA es anti-autoadjunto: $(iAx, x) = -(x, iAx)$.
2. iA genera un grupo de isometrías $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$

En este caso se tiene

- $\mathcal{T}(t)^* = \mathcal{T}(-t)$.
- para $x \in X$, $u(t) := \mathcal{T}(t)x$ es la única solución del sistema

$$\begin{aligned} u \in C(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, X)\\ i\tfrac{du}{dt} + \bar{A}u = 0\\ u(0) = x.\end{aligned}$$

Observación 5. No pretendo mostrar el caso general, pues no es mi objetivo, así que me centraré en el caso $\Delta = A$.
Recordemos a la función de Gauss $G_\alpha(x) = e^{-\alpha\pi|x|^2}$ con su respectiva transformada

$\hat{G}_\alpha(z) = \alpha^{-\frac{n}{2}} e^{-\alpha^{-1}\pi|z|^2}$, por ahora consideremos a $K_t(x) = (4i\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4t}}$ y su transformada $\hat{K}_t(z) = e^{-4i\pi^2|z|^2 t}$.
En la ecuación de Schrödinger tomando transformada de Fourier

$$i\hat{u}_t - 4\pi|z|^2\hat{u} + (|u|^\alpha u)\widehat{} = 0$$

multiplicando cada miembro por $-ie^{i4\pi^2|z|^2t}$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{i4\pi^2|z|^2t}\hat{u}_t - 4\pi|z|^2 ie^{i4\pi^2|z|^2t}\hat{u} &= ie^{i4\pi^2|z|^2t}(|u|^\alpha u)\widehat{} \\ \partial_t(e^{i4\pi^2|z|^2t}\hat{u}) &= ie^{i4\pi^2|z|^2t}(|u|^\alpha u)\widehat{} \end{aligned}$$

integrando

$$e^{4i\pi^2|z|^2t}\hat{u} - \phi = i\int_0^t e^{4i\pi^2|z|^2s}(|u|^\alpha u)\,\widehat{}\,ds$$

luego

$$\widehat{u} = e^{-4i\pi^2|z|^2t}\hat{\phi} + i\int_0^t e^{-4i\pi^2|z|^2(t-s)}(|u|^\alpha u)\,\widehat{}\,ds$$

tomando la inversa de la transformada de Fourier y dado que $(f*g)\,\widehat{}= \widehat{f}\,\widehat{g}$

$$u = K_t * \phi + i\int_0^t K_{t-s} * (|u|^\alpha u)ds$$

En nuestro caso se tiene $\mathcal{T}(t)\phi = K_t * \phi$.
La función u es solución del sistema

$$\begin{aligned} u \in C([0,T],X) \cap C^1([0,T],X^*) \\ i\tfrac{du}{dt} + \bar{A}u + f = 0 \\ u(0) = x. \end{aligned}$$

si y sólo si

$$u(t) = \mathcal{T}(t)x + i\int_0^t \mathcal{T}(t-s)f(s)ds \tag{5.2}$$

llamada fórmula de Duhamel.

En nuestro contexto, $X = H_0^1(\Omega)$.

Proposición 5.1. *Dado $2 \le p \le \infty$ y $t \neq 0$, entonces $\mathcal{T}(t) : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ es continuo y*

$$\|\mathcal{T}(t)\phi\|_p \le (4\pi|t|)^{-n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\|\phi\|_{p'}$$

Demostración. Como $K_t \in L^{\frac{p}{2}}$, desde que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|(4\pi i t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right|^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{2}{p}} &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{p|x|^2}{8t}} dx\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= (4\pi t)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} p^{-\frac{n}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y|^2} dy\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= (4\pi t)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} p^{-\frac{n}{p}} \\
&\leq (4\pi t)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}
\end{aligned}$$

la segunda igualdad viene de considerar el cambio de variable $x = \lambda y$ con $\lambda = \sqrt{\frac{8\pi t}{p}}$, para la tercera, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|y|^2} dy = 1$, y para la última desigualdad, basta recordar que $1 < p$.
Ahora, de la desigualdad de Young, desde que $\frac{1}{p'} + \frac{2}{p} + \frac{1}{p'} = 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|K_t \phi\|_p &\leq \|K_t\|_{\frac{p}{2}} \|\phi\|_{p'} \\
&\leq (4\pi|t|)^{-n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|\phi\|_{p'}
\end{aligned}$$

lo que termina la prueba.
□
La función u es solución de 5.1 si y sólo si

$$u(t) = \mathcal{T}(t)\phi + i\lambda \int_0^t \mathcal{T}(t-s)|u|^\alpha u(s) ds$$

dónde $u(t) = \mathcal{T}(t)\phi$ es la única solución del sistema

$$\begin{aligned}
u \in C(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, X) \\
i\tfrac{du}{dt} + \bar{A}u = 0 \\
u(0) = \phi.
\end{aligned}$$

Diremos que un par (q, r) es admisible si

$$\frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$$

y $2 \leq r < \frac{2n}{n-2}$, consideraremos que $(\infty, 2)$ es también admisible. Observe, en particular, que $n \geq 3$ y $2 \leq q \leq \infty$.
Dada una función $f \in L^q(I, L^r(\mathbb{R}^n))$ definiremos

$$\|f\|_{L^q(I,L^r)} = \left(\int_I (\|f(t)\|_r)^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

cuando $1 \leq q < \infty$, y similarmente cuando $q = \infty$

$$\|f\|_{L^q(I,L^r)} = ess\ sup\{\|f(t)\|_r : t \in I\}.$$

El siguiente resultado con apariencia técnico nos dice cómo evolucionan las soluciones en una EDP a través del tiempo.

Teorema 5.1. *(Estimativa de Strichartz débil) Sea (q, r) es un par admisible, con $q > 2$, I un intervalo de $\mathbb{R}$, $J = \bar{I}$, $t_0 \in J$. Si $f \in L^{q'}(I, L^{r'}(\mathbb{R}^n))$, entonces la función*

$$t \mapsto \Phi_f(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{T}(t-s)f(s)ds, \forall t \in I$$

pertenece a $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^n)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^n))$. Más aún, existe una constante C independiente de I tal que

$$\|\Phi_f\|_{L^q(I,L^r)} \leq C\|f\|_{q'}$$

Demostración. Primero consideremos sin pérdida de generalidad $I = [0, T)$, $T > 0$, $t_0 = 0$ y como siempre, basta considerar $f \in C_0([0, T), L^{r'})$.
En este caso tenemos:

- $\Phi_f \in C([0, T), L^r)$, sigue de la proposición en el apéndice.
- Vale la siguiente desigualdad

  $$\|\Phi_f(t)\|_r \leq \int_0^t (4\pi|t-s|)^{-n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}\|f(s)\|_{r'}ds \leq \int_0^T (4\pi|t-s|)^{-\frac{2}{q}}\|f(s)\|_{r'}ds$$

  gracias a ella y junto al hecho de que la función

  $$h(t) := \int_0^T (4\pi|t-s|)^{-\frac{2}{q}}\|f(s)\|_{r'}ds$$

  pertenece a $L^q(I)$.
  Sigue de la desigualdad de Hardy-Littlewood, aplicada al caso $n = 1, \lambda = \frac{2}{q}, p = \frac{1}{q'}, q = \frac{1}{q'}$, que existe C (dependiendo de q) tal que

  $$\|h\|_q \leq C\|f\|_{q'}$$

  finalmente

  $$\|\Phi_f\|_{L^q(I,L^r)} \leq C\|f\|_{q'}$$

  que es lo que queríamos.
  □

5.3. Existencia local y Unicidad

Proposición 5.2. *Dada la ecuación* (5.1) *con* $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$ *y* $0 < \alpha < \frac{4}{n-2}$. *Si* $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *y* u_1, u_2 *son dos soluciones débiles en* H^1 *sobre algún intervalo* $I \ni 0$. *Entonces* $u_1 = u_2$.

Necesitaremos el siguiente lema

Lema 5.1. *Sea* $I \ni 0$ *un intervalo abierto no vacío. Sean* $1 \leq a_j < b_j \leq \infty$ *y* $\phi_j \in L^{b_j}(I)$, $1 \leq j \leq k$. *Si existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|_{b_j} \leq C \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|_{a_j}$$

$\forall J \subset I$, $0 \in J$, *entonces* $\phi_1 = \cdots = \phi_k = 0$ *c.t.p. en* I.

Demostración. Supongamos que $[0, T] \subset I$, $T \in (0, \infty)$. Sea

$$t = sup\{a \geq 0 : \phi_1 = \cdots = \phi_k = 0, \text{ c.t.p. en } [0, a], \ a \leq T\}.$$

Es claro que $t \geq 0$, pues $\{0\}$ tiene medida cero. Si $t < T$, dado $a \in (t, T)$ de la condición,

$$\sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|_{L^{b_j}(t,a)} \leq C \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|_{L^{a_j}(t,a)}$$

por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \|\phi_j\|_{L^{a_j}(t,a)} &= \left[\int_{(t,a)} |\phi_j(s)|^{a_j} 1 ds\right]^{\frac{1}{a_j}} \\ &\leq \left[\left(\int_{(t,a)} 1 ds\right)^{1-\frac{a_j}{b_j}} \left(\int_{(t,a)} |\phi_j(s)|^{b_j} ds\right)^{\frac{a_j}{b_j}}\right]^{\frac{1}{a_j}} \\ &\leq (a-t)^{\frac{1}{a_j} - \frac{1}{b_j}} \|\phi_j\|_{L^{b_j}(t,a)} \end{aligned}$$

tomemos $t < a < T$ tal que

$$C(a-t)^{\frac{1}{a_j} - \frac{1}{b_j}} =: L < 1,$$

luego

$$\sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|_{L^{b_j}(t,a)} \leq L \sum_{j=1}^{k} \|\phi_j\|_{L^{b_j}(t,a)}$$

por lo que ϕ_j debe ser nula, c.t.p., en (t, a). Lo que no puede ser, pues t era el supremo con esa propiedad.

Finalmente $\phi_1, \ldots, \phi_k$ son nulas sobre todo intervalo de la forma $[0, T] \in I$, análogamente, son nulas sobre todo intervalo de la forma $[-S, 0] \in I$. Por lo tanto $\phi_1, \ldots, \phi_k$ son nulas sobre I.

□

Demostración. Supongamos que u_1, u_2 son dos soluciones del sistema, entonces

$$(u_1 - u_2)(t) = i\lambda \int_0^t \mathcal{T}(t-s)(|u_1|^\alpha u_1 - |u_2|^\alpha u_2)(s)ds.$$

Consideremos la función $f(t) = \frac{||t|^\alpha t - 1|}{|t-1|(|t|^\alpha + 1)}$, $|t| > 1$. Ahora, si $t \to \pm\infty$, $f(t) \to 1$, basta dividir el numerador y denominador por $|t|^{\alpha+1}$, si $t \to 1^+$, $f(t) \to \frac{\alpha+1}{2}$, basta ver que $\frac{t^{\alpha+1}-1}{t-1} \to (\alpha+1)$ si $t \to 1^+$; y si $t \to -1^-$, $f(t) \to \frac{1}{2}$. Luego la función f es acotada, por lo tanto existe $M > 0$, tal que $|f| \leq M$.
Supongamos que $|u_1| \geq |u_2| > 0$ y sea $t = \frac{u_1}{u_2}$, entonces

$$||u_1|^\alpha u_1 - |u_2|^\alpha u_2| \leq M(|u_1|^\alpha + |u_2|^\alpha)|u_1 - u_2|$$

y sigue siendo verdad aún si u_1, u_2 son cero.
Ahora, integrando y considerando, $p = \alpha + 1, \;\; r = \alpha + 2$

$$\begin{aligned} \||u_1|^\alpha u_1 - |u_2|^\alpha u_2\|_{r'} &\leq M\||u_1|^\alpha + |u_2|^\alpha |u_1 - u_2|\|_{r'} \\ &\leq M(\||u_1|^\alpha |u_1 - u_2|\|_{r'} + \||u_2|^\alpha |u_1 - u_2|\|_{r'}) \end{aligned}$$

también, de la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \left(\int (|u_1|^\alpha |u_1 - u_2|)^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}} &\leq \left(\int (|u_1|^{\alpha r' p'}\right)^{\frac{1}{r'p'}} \left(\int |u_1 - u_2|)^{r'p}\right)^{\frac{1}{r'p}} \\ &\leq \|u_1\|_r \|u_1 - u_2\|_r \end{aligned}$$

luego

$$\||u_1|^\alpha u_1 - |u_2|^\alpha u_2\|_{r'} \leq M(\|u_1\|_r^\alpha + \|u_2\|_r^\alpha)\|u_1 - u_2\|_r$$

Al integrar respecto de $t \in J \subset I$

$$\||u_1|^\alpha u_1 - |u_2|^\alpha u_2\|_{L^{q'}(J, L^{r'})} \leq M(\|u_1\|_\infty^\alpha + \|u_2\|_\infty^\alpha)\|u_1 - u_2\|_{L^{q'}(J, L^{r'})}$$

Sea $q = \frac{4r}{n(r-2)}$, de las estimaciones de Strichartz

$$\|u_1 - u_2\|_{L^q(J, L^r)} \leq CM(\|u_1\|_\infty^\alpha + \|u_2\|_\infty^\alpha)\|u_1 - u_2\|_{q'}$$

para alguna constante C y también

$$\|u_1 - u_2\|_{L^q(J,L^r)} \leq WCM\|u_1 - u_2\|_{L^{q'}(J,L^r)}$$

donde $W := \|u_1\|_\infty^\alpha + \|u_2\|_\infty^\alpha$ depende de I y no de J.
Finalmente por el lema, $u_1 - u_2$ es nula c.t.p.
□

Teorema 5.2. *El problema* (5.1) *con* $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$ *y* $0 < \alpha < \frac{4}{n-2}$ *está localmente bien definido en* $H^1(\mathbb{R}^n)$. *Además, se tienen las leyes de conservación de carga y energía:*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2} &= \|\phi\|_2 \\ E(u(t)) &= E(\phi) \end{aligned}$$

para todo $t \in (-T_{min}, T_{max})$, *con* u *solución a la ecuación de Schrödinger, con valor inicial* $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Supongamos que hemos probado la existencia local de soluciones y sea $I = (-S, T)$ el intervalo maximal de dicha solución. Si $T < \infty$, $\lim_{t \to T} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$, pero la norma de la solución es constante. Luego $T = \infty$, análogamente $S = \infty$.
Veamos la existencia local. Definamos:

$$u_{n+1}(t) = \mathcal{T}(t)\phi + i\lambda \int_0^t \mathcal{T}(t-s)|u_n|^\alpha u_n(s)ds, \ \forall n \geq 0$$

donde $u_0 = \phi$. Luego tenemos que

$$|u_{n+1} - u_n|(t) = i\lambda \int_0^t \mathcal{T}(t-s)\left[|u_n|^\alpha u_n - |u_{n-1}|^\alpha u_{n-1}\right](s)ds$$

repitiendo la prueba de la unicidad, tenemos que dado $r = \alpha+2$, $q = \frac{4r}{n(r-2)}$, entonces existe una constante $L > 0$

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{L^q(J,L^r)} \leq L\|u_n - u_{n-1}\|_{L^{q'}(J,L^r)}$$

que no depende de n ni de $J \subset \mathbb{R}$. Ahora, de la prueba del lema, dado $t \in J$, existe a próximo a t tal que

$$\|u_n - u_{n-1}\|_{L^{q'}(J,L^r)} \leq L(a-t)^{\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}}\|u_n - u_{n-1}\|_{L^q(J,L^r)}$$

por lo tanto, tomando a tal que $L(a-t)^{\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}} < A < 1$, tenemos

$$\|u_{n+1} - u_n\|_q \leq A\|u_n - u_{n-1}\|_q$$

por lo tanto localmente u_n converge a una solución u, pues verifica

$$u(t) = \mathcal{T}(t)\phi + i\int_0^t \mathcal{T}(t-s)|u(s)|^\alpha u(s)ds$$

la fórmula de Duhamel 5.2.
Por lo tanto existe solución y es única, las demás condiciones siguen de las observaciones.

□

El logro final de éste capítulo ha sido mostrar que la ecuación 5.1 posee soluciones bajo las condiciones establecidas, en particular asumimos $\alpha < \frac{4}{n-2}$. Para ver el caso extremo, $\alpha = \frac{4}{n-2}$, recomiendo leer [10], quienes bajo otras herramientas prueban estimativas de Strichartz similares.

Bibliografía

[1] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York.

[2] Cazenave, T. (2003). *Semilinear Schrödinger Equations*. Courant lecture notes in mathematics. American Mathematical Society.

[3] Christ, M. (2014). A sharpened Hausdorff-Young inequality. *arXiv e-prints*, page arXiv:1406.1210.

[4] DiBenedetto, E. (2002). *Real Analysis*, volume 10.1007/978-1-4612-0117-5.

[5] Domenico, F. (2016). A Study of a Nonlinear Schrödinger Equation for Optical Fibers. *arXiv e-prints*, page arXiv:1612.00358.

[6] Evans, L. C. and Gariepy, R. F. (1992). *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in advanced mathematics. CRC Press, 1 edition.

[7] Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications*. PAM. Wiley, 2 edition.

[8] Frank Rupert, L. and Lieb Elliott, H. (2010). A new, rearrangement-free proof of the sharp Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. *arXiv e-prints*, page arXiv:1010.5821.

[9] Indratno, S. (2010). Hardy-Littlewood-Sobolev Inequality. *Manhattan: Kansas State University*.

[10] Keel, M. and Tao, T. (1998). Endpoint strichartz estimates. *American Journal of Mathematics*, 120(5):955–980.

[11] Kevrekidis, Q.-Y. C. P. and Malomed, B. A. (2009). Nonlinear Schrödinger equations under random nonlinearity management. *Physics Letters A*, 373.

[12] Khotyakov, M. (2011). *Two proofs of the sharp Hardy-Littlewood-Sobolev inequality*. B.S. Thesis, LMU Munich.

[13] Krantz, S. G. and Parks, H. R. (2008). *Geometric integration theory*. Cornerstones. Birkhäuser Boston, 1 edition.

[14] Lieb, E. H. and Loss, M. (2001). *Analysis*. Graduate studies in mathematics 14. American Mathematical Society, 2nd ed edition.

[15] Lieb, E. H. and Seiringer, R. (2009). *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*. CUP.

[16] Malomed, B. (2005). Nonlinear Schrödinger equations. In Scott, A., editor, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, pages 639–643. New York: Routledge, New York.

[17] Pazy, A. (1992). *Semigroups of linear operators and applications to PDEs*. Applied Mathematical Sciences. Springer, springer edition.

[18] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 3Â° edition.

[19] Sobolev, S. (1938). On a theorem of functional analysis. (Russian). *Mat. Sbornik*, 46:471–479.

[20] Stein, E. M. and Weiss, G. (1971). *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. PMS-32 Princeton Mathematical Series. Princeton Univ Pr.